

Для  
преподавателей

# АЛГЕБРА

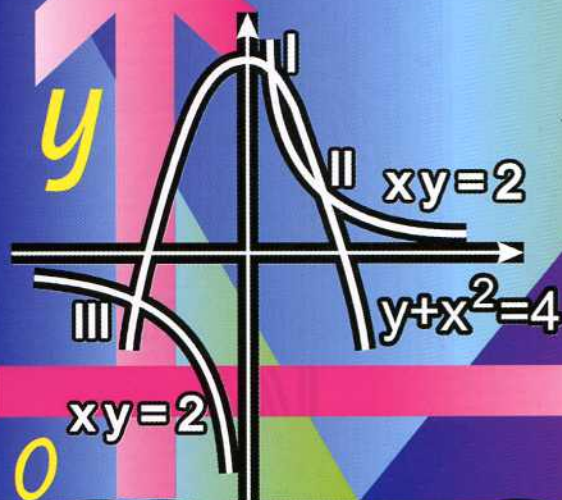
## ПОУРОЧНЫЕ ПЛАНЫ

по учебнику

Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк,  
К. И. Нешкова, С. Б. Суворовой

8

КЛАСС



1234567890

Издательство «Учитель»

# **АЛГЕБРА**

**8 класс**

## **ПОУРОЧНЫЕ ПЛАНЫ**

**по учебнику Ю. Н. Макарычева,  
Н. Г. Миндюк, К. И. Нешкова, С. Б. Суворовой**

Авторы-составители

**Т. Ю. Дюмина, кандидат педагогических наук  
А. А. Махонина, кандидат педагогических наук**

**Волгоград**

УДК 372.016:512\*08

ББК 74.262.21

A45

Авторы-составители

Т. Ю. Дюмина, А. А. Махонина

**Алгебра.** 8 класс : поурочные планы по учебнику Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешкова, С. Б. Суворовой / авт.-сост. Т. Ю. Дюмина, А. А. Махонина. – Волгоград : Учитель, 2011. – 399 с.

ISBN 978-5-7057-2713-1

В пособии представлены поурочные планы, составленные в соответствии с программой и учебником: Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г., Нешков К. И., Суворова С. Б. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / под ред. С. А. Теляковского. М.: Просвещение, 2010. В разработках содержатся устные упражнения, рекомендации к объяснению нового материала, тесты, проверочные и самостоятельные работы, математические диктанты и др. Целью предложенных материалов является оказание практической помощи учителю в выборе путей построения урока, отвечающего современным требованиям, в подборе дополнительного дидактического материала, призванного обеспечить высокую эффективность учебного процесса.

Предназначено учителям математики общеобразовательных учреждений; может быть полезно учащимся, студентам педагогических учебных заведений.

УДК 372.016:512\*08

ББК 74.262.21

ISBN 978-5-7057-2713-1

© Дюмина Т. Ю., Махонина А. А.,  
авторы-составители, 2009

© Издательство «Учитель», 2009

© Оформление. Издательство «Учитель», 2010

Издание 2011 г.

## **ВВЕДЕНИЕ**

Поурочные планы составлены в соответствии с программой и учебником для общеобразовательных учреждений «Алгебра. 8 класс» (авторы Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; под редакцией С. А. Теляковского. М.: Просвещение, 2010).

Разработки уроков содержат задания для устной работы, рекомендации к объяснению нового материала, тесты, проверочные и самостоятельные работы, математические диктанты и др.

Целью данного пособия является практическая помощь учителю математики, особенно молодому, в выборе путей построения урока, отвечающего современным требованиям, в комплектовании собственной педагогической копилки разнообразным дополнительным дидактическим материалом и контрольно-измерительными заданиями. Подбор задач призван обеспечить высокий темп урока.

Предлагаемое распределение учебного времени на изучение тем, соответствующих программе, носит примерный характер. Учитель может по своему усмотрению вносить коррективы в ход урока с учетом специфики и уровня подготовки класса.

Представленные поурочные планы могут служить дополнением к планам, составленным учителем.

# Глава I. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

## Урок 1

### ПОНЯТИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ

**Цели:** ввести понятия «дробное выражение» и «рациональная дробь»; формировать умение находить значения рациональных дробей при заданных значениях переменных.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Устная работа.

Назовите дробь, соответствующую данному частному:

а)  $3 : 7$

д)  $-2 : 9$

б)  $18 : 5$

е)  $3 : (-8)$

в)  $20 : 30$

ж)  $-5 : (-11)$

г)  $4 : 12$

з)  $-2 : (-4)$

##### III. Объяснение нового материала.

Объяснение проводить согласно пункту учебника, обращая внимание на усвоение учащимися основных понятий. Для контроля предложить учащимся задание на распознавание различных рациональных выражений.

**Задание.** Какие из следующих рациональных выражений являются целыми, а какие – дробными?

а)  $\frac{1}{7}x^2y$ ;

д)  $\frac{1}{4}n^2 + \frac{m^7 - 2}{5}$ ;

б)  $\frac{x}{5} - 4$ ;

е)  $2x - 3 + \frac{x - 1}{x + 4}$ ;

в)  $1 + \frac{2}{a}$ ;

ж)  $\frac{a^3 - ab}{4}$ ;

г)  $\frac{2x + a}{c^2}$ ;

з)  $\frac{x + 3}{x^2 - 2xy}$ .

Какие из дробных выражений являются рациональными дробями?

#### IV. Формирование умений и навыков.

- Выполнение заданий по учебнику.

№ 1 (устно), 3, 4, 5 (а).

Образец оформления задания № 5 (а):

$$\frac{(a+b)^2 - 1}{a^2 + 1} \quad a = -3, b = -1$$

$$\frac{(-3-1)^2 - 1}{(-3)^2 + 1} = \frac{(-4)^2 - 1}{9+1} = \frac{16-1}{10} = \frac{15}{10} = 1,5.$$

№ 7 (а), 8, 9, 16.

В случае затруднения учащихся при выполнении заданий 7 (а), 8 нужно напомнить им, что для выражения переменной из формулы достаточно рассматривать эту переменную как неизвестную величину.

#### V. Итоги урока.

- Какое выражение называется целым? Дробным?
- Как называются целые и дробные выражения?
- Что такое рациональная дробь?
- Всякая ли рациональная дробь является дробным выражением? Приведите примеры.
- Как найти значение рациональной дроби при заданных значениях входящих в неё переменных?

**Домашнее задание:** № 2, 5 (б), 6, 7 (б).

### Урок 2

#### ДОПУСТИМЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ, ВХОДЯЩИХ В ДРОБНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ

**Цель:** формировать умение находить допустимые значения переменных, входящих в дробные выражения.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

## II. Устная работа.

Подставьте вместо значка \* какое-нибудь число и назовите полученную дробь:

а)  $\frac{1}{*}$ ;      в)  $\frac{*}{3}$ ;      д)  $\frac{1}{3-*}$ ;      ж)  $\frac{2}{1+*}$ ;  
б)  $-\frac{5}{*}$ ;      г)  $\frac{7}{*}$ ;      е)  $\frac{5+*}{4}$ ;      з)  $-\frac{6}{*-5}$ .

## III. Объяснение нового материала.

1. Актуализация знаний учащихся.

- Какую дробь называют рациональной?
- Всякая ли дробь является дробным выражением?
- Как найти значение рациональной дроби при заданных значениях входящих в неё переменных?

2. Рассмотрение вопроса о том, всегда ли рациональная дробь имеет смысл.

Задание. Найдите значение дроби при указанных значениях переменной:

$$\frac{x+3}{x-1} \quad \text{при } x = 4; 0; 1.$$

Выполняя задание, учащиеся понимают, что при  $x = 1$  невозможно найти значение дроби. Это позволяет им сделать следующий вывод: в рациональную дробь нельзя подставлять числа, которые обращают ее знаменатель в нуль (этот вывод должен быть сформулирован самими учащимися).

Далее учитель сообщает учащимся, что все значения переменных, при которых рациональное выражение имеет смысл, называют *допустимыми значениями переменных*.

3. Вывод правила нахождения допустимых значений переменных, входящих в рациональную дробь.

– Как находить допустимые значения переменных?

1) Если выражение является целым, то все значения входящих в него переменных будут допустимыми.

2) Чтобы найти допустимые значения переменных дробного выражения, нужно проверить, при каких значениях знаменатель обращается в нуль. Найденные числа не будут являться допустимыми значениями.

#### IV. Формирование умений и навыков.

• Выполнение заданий по учебнику: № 10, 11, 13, 14 (а, в), 15 (г), 17.

Ответ на вопрос о допустимых значениях переменных, входящих в дробное выражение, может звучать по-разному. Например, рассматривая рациональную дробь  $\frac{3}{x-4}$ , можно сказать, что допустимыми значениями переменной являются все числа, кроме  $x = 4$ , или что в допустимые значения переменной не входит число 4, то есть  $x \neq 4$ .

##### № 11.

$$\text{г) } \frac{x^2 - 8}{4x(x+1)}$$

$$4x(x+1) = 0$$

$$4x = 0 \quad \text{или} \quad x + 1 = 0$$

$$x = 0 \quad \quad \quad x = -1$$

Ответ:  $x \neq 0$  и  $x \neq -1$  (или все числа, кроме 0 и  $-1$ ).

При выполнении заданий № 14 (а, в), 15 (г), 17 следует обратить внимание учащихся на необходимость учёта допустимых значений переменных.

##### № 15.

$$\text{г) } \frac{x(x+3)}{2x+6} = 0$$

$$x(x+3) = 0$$

$$2x+6 \neq 0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = -3 \quad \quad x \neq -3$$

Ответ:  $x = 0$ .

• Дополнительные задания (для учащихся с высоким уровнем подготовки): № 18, 20.

##### № 18.

$$\text{а) } \frac{4}{a^2 + 5}.$$

Из всех дробей с одинаковым положительным числителем бóльшей будет та, у которой знаменатель является наименьшим,



то есть необходимо найти, при каком значении  $a$  выражение  $a^2 + 5$  принимает наименьшее значение.

Поскольку выражение  $a^2$  не может быть отрицательным ни при каких значениях  $a$ , то выражение  $a^2 + 5$  будет принимать наименьшее значение при  $a = 0$ .

Ответ:  $a = 0$ .

$$\text{б) } \frac{10}{(a-3)^2 + 1}.$$

Рассуждая аналогично, получим, что необходимо найти то значение  $a$ , при котором выражение  $(a - 3)^2 + 1$  принимает наименьшее значение.

Ответ:  $a = 3$ .

**№ 20.**

$$\frac{18}{4x^2 + 9 + y^2 + 4xy}.$$

Для ответа на вопрос предварительно нужно преобразовать выражение, стоящее в знаменателе дроби.

$$\frac{18}{4x^2 + 9 + y^2 + 4xy} = \frac{18}{4x^2 + 4xy + y^2 + 9} = \frac{18}{(2x + y)^2 + 9}.$$

Дробь будет принимать наибольшее значение, если выражение  $(2x + y)^2 + 9$  принимает наименьшее значение. Поскольку  $(2x + y)^2$  не может принимать отрицательные значения, то наименьшее значение выражения  $(2x + y)^2 + 9$  равно 9.

Тогда значение исходной дроби равно  $\frac{18}{9} = 2$ .

## V. Итоги урока.

– Какие значения называются допустимыми значениями переменных, входящих в выражение?

– Каковы допустимые значения переменных целого выражения?

– Как найти допустимые значения переменных дробного выражения?

– Существуют ли рациональные дроби, для которых все значения переменных являются допустимыми? Приведите примеры таких дробей.

**Домашнее задание:** № 12, 14 (б, г), 212, 19 (дополнительно).

## Урок 3

### ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ

**Цели:** вывести основное свойство дроби; формировать умение его применять.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Проверочная работа.

##### Вариант 1

1. Найдите значение дроби  $\frac{a+3c}{c}$  при  $a = 12, c = -2$ .
2. Найдите значение переменной, при котором значение дроби  $\frac{2x-6}{x+2}$  равно нулю. Сделайте проверку.
3. Найдите допустимые значения переменной в выражении:  
а)  $\frac{2x-4}{5}$ ;      б)  $4a - \frac{1}{a+1}$ ;      в)  $\frac{n+3}{n^2-2n}$ .

##### Вариант 2

1. Найдите значение дроби  $\frac{2x-y}{x}$  при  $x = -4, y = -16$ .
2. Найдите значение переменной, при котором значение дроби  $\frac{3a-9}{a+1}$  равно нулю. Сделайте проверку.
3. Найдите допустимые значения переменной в выражении:  
а)  $\frac{m+4}{7}$ ;      б)  $a - 1 + \frac{3}{a+8}$ ;      в)  $\frac{3x}{x^2-4x}$ .

#### III. Объяснение нового материала.

1. Актуализация знаний о сокращении обыкновенных дробей и приведении их к общему знаменателю.

– Что значит сократить дробь?

Сократим дробь  $\frac{12}{18}$ . Для этого разделим числитель и знаме-

натель на их общий множитель.  $\frac{12}{18} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 6} = \frac{2}{3}$ .

Сократите дроби:  $\frac{15}{35}, \frac{14}{18}, \frac{9}{21}$ .

– Как привести дробь к новому знаменателю?

Приведём дробь  $\frac{3}{7}$  к знаменателю 28. Для этого умножим

числитель и знаменатель дроби  $\frac{3}{7}$  на 4.  $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{12}{28}$ .

Приведите дроби  $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$  к знаменателю 60.

– Каким свойством мы воспользовались при сокращении дробей и приведении дробей к новому знаменателю? Сформулируйте основное свойство дроби.

Буквенная запись основного свойства дроби (выносится на доску):

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, \quad b \neq 0, c \neq 0$$

2. Два типа заданий, при выполнении которых применяется основное свойство дроби:

- приведение дробей к новому знаменателю;
- сокращение дробей.

Для демонстрации примеров применения основного свойства дроби можно использовать:

1) пример 1 из учебника (приведение дроби к новому знаменателю);

2)  $\frac{2x^2y^3}{8xy}$  (сокращение дроби).

#### IV. Формирование умений и навыков.

1. Умножьте числитель и знаменатель дроби на указанное число.

- а)  $\frac{2a}{3b}$  на 5;      б)  $\frac{2a+c}{5c}$  на 2;      в)  $\frac{\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y}{x}$  на 6.

2. Разделите числитель и знаменатель дроби на указанное число:

а)  $\frac{4a}{6b}$  на 2;

б)  $\frac{3a+6b}{9c}$  на 3;

в)  $\frac{10x}{5+20y}$  на 5.

3. Заполните пустые места так, чтобы равенство было верным:

1)  $\frac{3a}{b^2} = \frac{\quad}{b^3}$ ;

4)  $\frac{ab}{5c} = \frac{a^2b^4}{\quad}$ ;

2)  $\frac{b^2}{3a} = \frac{b^4}{\quad}$ ;

5)  $\frac{a^3n^2}{5a^6n} = \frac{n}{\quad}$ ;

3)  $\frac{5c}{ab} = \frac{\quad}{3a^3b^2}$ ;

6)  $\frac{6c^2d^3}{8c^5d^2} = \frac{3d}{\quad}$ .

4. Выполните задания по учебнику: № 23, 25(а, в, д), 26, 28 (а, б), 47.

## V. Итоги урока.

- В чём состоит основное свойство рациональной дроби?
- Что такое тождество?
- Когда применяется основное свойство дроби?

**Домашнее задание:** № 24, 25 (б, г, е), 28 (в, г), 48.

## Урок 4

### СОКРАЩЕНИЕ ДРОБЕЙ

**Цель:** формировать умение применять основное свойство дроби при сокращении дробей.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

Сократите дробь:

а)  $\frac{2}{6}$ ;

в)  $\frac{10}{45}$ ;

д)  $\frac{20}{32}$ ;

ж)  $\frac{24}{56}$ ;

б)  $\frac{6}{21}$ ;

г)  $\frac{7}{28}$ ;

е)  $\frac{13}{39}$ ;

з)  $\frac{27}{72}$ .

### III. Объяснение нового материала.

1. Актуализация знаний и умений (учащиеся должны помнить формулы сокращенного умножения и основные приёмы разложения многочлена на множители).

– Какие существуют способы разложения многочлена на множители?

– В чём состоит каждый из этих способов?

– Разложите на множители многочлен:

а)  $x^2y - 2x$ ;

д)  $x^2 + 6x + 9$ ;

б)  $3a^2b - 9ab^2$ ;

е)  $a^2 - 10a + 25$ ;

в)  $m^2 - 4n$ ;

ж)  $ax + bx + ay + by$ .

г)  $a^3 - a$ ;

з)  $ab - b + 3a - 3$ .

2. Разбор примера из учебника и формирование вывода: чтобы сократить рациональную дробь, нужно сначала разложить на множители её числитель и знаменатель.

### IV. Формирование умений и навыков.

• Выполнение заданий по учебнику: № 29, 30 (а, в, д), 32 (а, в), 31, 34, 35 (а, в).

№ 35.

$$\text{а) } \frac{2x + bx - 2y - by}{7x - 7y} = \frac{2(x - y) + b(x - y)}{7(x - y)} = \frac{(x - y)(2 + b)}{7(x - y)} = \frac{2 + b}{7}.$$

$$\text{в) } \frac{xy - x + y - y^2}{x^2 - y^2} = \frac{x(y - 1) - y(y - 1)}{(x - y)(x + y)} = \frac{(y - 1)(x - y)}{(x - y)(x + y)} = \frac{y - 1}{x + y}.$$

• Дополнительное задание.

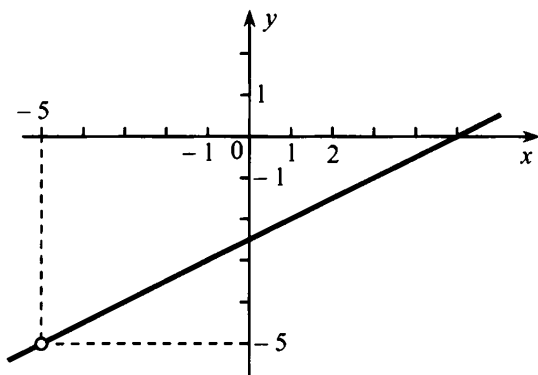
№ 36.

$$\text{а) } y = \frac{x^2 - 25}{2x + 10}.$$

Областью определения этой функции является множество всех чисел, кроме  $x = -5$ . Сократим дробь, задающую функцию:

$$\frac{x^2 - 25}{2x + 10} = \frac{(x - 5)(x + 5)}{2(x + 5)} = \frac{x - 5}{2}.$$

Графиком функции  $y = \frac{x-5}{2}$  является прямая, а графиком функции  $y = \frac{x^2-25}{2x+10}$  – та же прямая, но с «выколотой» точкой  $(-5; -5)$ .



## V. Итоги урока.

- В чём состоит основное свойство дроби?
- Когда применяется основное свойство дроби?
- Что нужно сделать, чтобы сократить рациональную дробь?
- Какие существуют способы разложения многочлена на множители?

**Домашнее задание:** № 30 (б, г, е), 32 (б, г), 33, 35 (б, г), 36 (б) (дополнительно).

## Урок 5

### СЛЕДСТВИЕ ИЗ ОСНОВНОГО СВОЙСТВА ДРОБИ

**Цели:** продолжить формирование умения сокращать дроби; вывести следствие из основного свойства дроби и формировать умение применять его при сокращении дробей.

### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

Сократите дробь:

а)  $-\frac{3}{12}$ ;

в)  $\frac{-4}{6}$ ;

д)  $\frac{11}{-77}$ ;

ж)  $-\frac{18}{45}$ ;

б)  $\frac{10}{25}$ ;

г)  $\frac{14}{35}$ ;

е)  $\frac{-9}{-21}$ ;

з)  $\frac{-16}{-32}$ .

### III. Проверочная работа.

#### Вариант 1

1. Приведите дроби к указанному знаменателю:

а)  $\frac{3x^2}{5y^2} = \frac{\quad}{15xy^2}$ ; б)  $\frac{2x}{x-2y} = \frac{\quad}{3x-6y}$ ; в)  $\frac{3}{a-b} = \frac{\quad}{a^2-b^2}$ .

2. Сократите дробь:

а)  $\frac{7a^2b}{14a^3}$ ; б)  $\frac{d(a-b)}{ca-cb}$ .

#### Вариант 2

1. Приведите дроби к указанному знаменателю:

а)  $\frac{5a^2}{4c^2} = \frac{\quad}{12ac^2}$ ; б)  $\frac{3a}{a+3c} = \frac{\quad}{2a+6c}$ ; в)  $\frac{5}{x+y} = \frac{\quad}{x^2-y^2}$ .

2. Сократите дробь:

а)  $\frac{16x^2}{8x^2y}$ ; б)  $\frac{mx-my}{p(x-y)}$ .

### IV. Объяснение нового материала.

Специальное внимание необходимо уделить следствию из основного свойства дроби, а также следует провести аналогию с обыкновенными дробями.

**Задание:** среди данных дробей найдите такие, которые равны  $\frac{2}{3}$ ; ответ объясните.

$$\frac{-2}{3}; \frac{-2}{-3}; -\frac{-2}{3}; \frac{2}{-3}; -\frac{2}{-3}; -\frac{-2}{-3}.$$

Вспомните, что «минус» перед дробью можно записывать как перед числителем, так и перед знаменателем.

**Задание:** среди предложенных дробей найдите такие, которые равны  $-\frac{5}{7}$ ; ответ объясните.

$$\frac{-5}{7}; \frac{5}{7}; \frac{5}{-7}; \frac{-5}{-7}; -\frac{5}{-7}; -\frac{-5}{-7}.$$

Буквенная запись следствия из основного свойства дроби (выносится на доску):

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{a}{-b} = -\frac{-a}{b}}$$

Учащиеся должны знать и осознавать формулировку этого следствия. В случае затруднений можно продемонстрировать практическое применение следствия и дать его более прикладную к задачам формулировку:

|  |  |
|--|--|
| <p>1. «Минус» перед дробью можно вносить либо в числитель, либо в знаменатель дроби.</p> $\frac{2a-b}{c-3} = \frac{-(2a-b)}{c-3} = \frac{b-2a}{c-3}$ $\frac{2a-b}{c-3} = \frac{2a-b}{-(c-3)} = \frac{2a-b}{3-c}$ | <p>2. «Минус» из числителя или знаменателя дроби можно выносить за знак дроби.</p> $\frac{x-y}{z-4} = \frac{-(y-x)}{z-4} = -\frac{y-x}{z-4}$ $\frac{x-y}{z-4} = \frac{x-y}{-(4-z)} = -\frac{x-y}{4-z}$ |
|--|--|

## V. Формирование умений и навыков.

• Выполнение заданий по учебнику: № 38, 39, 40 (а, в, д, ж), 41, 43, 44 (а, в).

### № 44.

При выполнении этого задания учащиеся могут допустить ошибку, вынося за скобки общий множитель. Поэтому следует привести подробную запись преобразований:

$$\text{а) } \frac{(2a-2b)^2}{a-b} = \frac{(2(a-b))^2}{a-b} = \frac{2^2(a-b)^2}{a-b} = \frac{4(a-b)^2}{a-b} = 4a-4b.$$

$$\text{в) } \frac{(3x+6y)^2}{5x+10y} = \frac{(3(x+2y))^2}{5(x+2y)} = \frac{3^2(x+2y)^2}{5(x+2y)} = \frac{9(x+2y)}{5}.$$

• Дополнительное задание (для учащихся с высоким уровнем подготовки):

### № 46.

$$\text{а) } \frac{3^{n+2} - 3^n}{3^{n+2} + 3^{n+1} + 3^n}.$$



Сначала необходимо сократить данную дробь, вынося в числителе и знаменателе за скобки общий множитель.

$$\frac{3^{n+2} - 3^n}{3^{n+2} + 3^{n+1} + 3^n} = \frac{3^n \cdot 3^2 - 3^n}{3^n \cdot 3^2 + 3^n \cdot 3 + 3^n} = \frac{3^n(9-1)}{3^n(9+3+1)} = \frac{3^n \cdot 8}{3^n \cdot 13} = \frac{8}{13}.$$

Таким образом, каким бы ни было  $n$ , данная дробь принимает значение  $\frac{8}{13}$ , то есть значение дроби не зависит от  $n$ .

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad \frac{16^{n+1} - 2^{n+4}}{4 \cdot 2^n (2^{3n} - 1)} &= \frac{(2^4)^{n+1} - 2^{n+4}}{4 \cdot 2^n (2^{3n} - 1)} = \frac{2^{4n+4} - 2^{n+4}}{4 \cdot 2^n (2^{3n} - 1)} = \\ &= \frac{2^{n+4} \cdot 2^{3n} - 2^{n+4}}{4 \cdot 2^n (2^{3n} - 1)} = \frac{2^{n+4} (2^{3n} - 1)}{4 \cdot 2^n (2^{3n} - 1)} = \frac{2^n \cdot 2^4}{4 \cdot 2^n} = \frac{16}{4} = 4. \end{aligned}$$

## VI. Итоги урока.

- В чём состоит основное свойство дроби?
- Сформулируйте следствие из основного свойства дроби.
- Как применяется это следствие при преобразовании дробей?

Домашнее задание: № 40 (б, г, е, з), 44 (б, г), 42, 45 (дополнительно)

## Урок 6

### ПРАВИЛО СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ ДРОБЕЙ С ОДИНАКОВЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ

**Цели:** актуализировать знания о сложении и вычитании обыкновенных дробей и одинаковыми знаменателями; формировать умение вести подробные и исчерпывающие записи вычислений.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

Вычислите:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \frac{2}{7} + \frac{3}{7}; & \text{в)} \frac{8}{13} + \frac{9}{13}; & \text{д)} \frac{2}{5} + \frac{3}{5}; & \text{ж)} -\frac{4}{7} - \frac{6}{7}; \\ \text{б)} \frac{8}{11} - \frac{5}{11}; & \text{г)} -\frac{7}{8} - \frac{5}{8}; & \text{е)} -\frac{11}{15} + \frac{4}{15}; & \text{з)} -\frac{7}{12} + \frac{5}{12}. \end{array}$$

### III. Объяснение нового материала.

Рациональные дроби с одинаковыми знаменателями складываются и вычитаются по тем же правилам, что и обыкновенные дроби.

Буквенная запись (выносится на доску):

$$\boxed{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}} \quad \text{и} \quad \boxed{\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}}$$

Рассмотрим примеры 1–3 из учебника.

### IV. Формирование умений и навыков.

• Выполнение заданий по учебнику: № 53, 55, 57, 58 (а), 59 (а), 60.

При вычитании дробей учащиеся могут допускать распространенную ошибку: не учитывать, что «минус» перед дробью вносится в числитель, и неправильно расставлять знаки. Поэтому учащимся важно первое время вести подробные записи.

№ 57.

$$\begin{aligned} \text{в) } \frac{3a-1}{a^2-b^2} - \frac{3b-1}{a^2-b^2} &= \frac{3a-1-(3b-1)}{a^2-b^2} = \frac{3a-1-3b+1}{a^2-b^2} = \\ &= \frac{3a-3b}{a^2-b^2} = \frac{3(a-b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{3}{a+b}. \end{aligned}$$

№ 60.

$$\begin{aligned} \frac{a^2-12b}{a^2-3ab} - \frac{3ab-4a}{a^2-3ab} &= \frac{a^2-12b-3ab+4a}{a^2-3ab} = \\ &= \frac{a(a-3b)+4(a-3b)}{a(a-3b)} = \frac{(a-3b)(a+4)}{a(a-3b)} = \frac{a+4}{a}. \end{aligned}$$

При  $a = -0,8$  дробь  $\frac{a+4}{a}$  равна  $-4$ , то есть данное в условии значение  $b$  является лишним.

### V. Итоги урока.

– Сформулируйте правило сложения рациональных дробей с одинаковыми знаменателями.

– Сформулируйте правило вычитания рациональных дробей с одинаковыми знаменателями.

Домашнее задание: № 54, 56, 59 (б).

## Урок 7

### СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ДРОБЕЙ С ПРОТИВОПОЛОЖНЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ

**Цель:** формировать умение складывать и вычитать рациональные дроби с противоположными знаменателями.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Устная работа.

Вычислите:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} -\frac{5}{7} + \frac{2}{7}; & \text{в)} -\frac{2}{11} - \frac{7}{11}; & \text{д)} \frac{3}{8} + \frac{-1}{8}; & \text{ж)} -\frac{7}{15} + \frac{7}{-15}; \\ \text{б)} \frac{4}{9} + \frac{7}{9}; & \text{г)} \frac{1}{-5} + \frac{4}{5}; & \text{е)} \frac{2}{13} - \frac{-7}{13}; & \text{з)} \frac{4}{21} + \frac{-8}{-21}. \end{array}$$

##### III. Объяснение нового материала.

Вспомните следствие из основного свойства дроби. Выполните задание, в котором нужно поменять знак числителя или знаменателя рациональной дроби.

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \frac{2x-1}{3-4y}; & \text{б)} -\frac{5a+4}{3x-7}; & \text{в)} \frac{1-6z}{3+2a}; & \text{г)} -\frac{2n-m}{4-3m}. \end{array}$$

Разбор примера 4 из учебника и формулирование вывода о том, как сложить или вычесть две рациональные дроби с противоположными знаменателями.

##### IV. Формирование умений и навыков.

1. Выполните сложение или вычитание дробей:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \frac{5}{a} + \frac{3}{-a}; & \text{в)} \frac{x+1}{-n} + \frac{2x}{n}; \\ \text{б)} \frac{7}{-3x} + \frac{2}{3x}; & \text{г)} \frac{y+3}{2y} - \frac{4-5y}{-2y}. \end{array}$$

2. Выполните задания по учебнику: № 61, 63.

3. Преобразуйте выражение:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \frac{2x-3}{(x-1)^2} + \frac{5-x}{(1-x)^2}; & \text{в)} \frac{x^2+9}{(x-3)^3} + \frac{6x}{(3-x)^3}. \\ \text{б)} \frac{16-7x}{(x-4)^2} - \frac{x-x^2}{(4-x)^2}; & \end{array}$$

4. Выполните задания по учебнику: № 66, 68.

№ 68.

$$\frac{5n^2 + 3n + 6}{n} = \frac{5n^2}{n} + \frac{3n}{n} + \frac{6}{n} = 5n + 3 + \frac{6}{n}.$$

Полученное выражение принимает натуральные значения, если дробь  $\frac{6}{n}$  является натуральным числом, то есть когда 6 делится на  $n$ . Значит,  $n = 1; 2; 3; 6$ .

Ответ: 1; 2; 3; 6.

### V. Итоги урока.

– Сформулируйте правило сложения и вычитания рациональных дробей с одинаковыми знаменателями.

– Как выполнить сложение или вычитание рациональных дробей, знаменатели которых являются противоположными выражениями?

Домашнее задание: № 62, 64, 67, 69 (дополнительно).

## Урок 8

### ПРАВИЛО СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ ДРОБЕЙ С РАЗНЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ

Цель: формировать умение приводить рациональные дроби к общему знаменателю и выполнять их сложение и вычитание.

#### Ход урока

I. Организационный момент.

II. Проверочная работа.

#### Вариант 1

Выполните сложение и вычитание дробей:

а)  $\frac{16}{5x} + \frac{4}{5x}$ ;

г)  $\frac{4x-5}{6x-3} + \frac{7x-9}{6x-3} - \frac{9x-13}{6x-3}$ ;

б)  $\frac{5a+2}{a^3} - \frac{3a+2}{a^3}$ ;

д)  $\frac{3a-5b}{a-b} + \frac{2a-4b}{b-a}$ .

в)  $-\frac{4-m}{2m^2} + \frac{6-m}{2m^2}$ ;

## Вариант 2

Выполните сложение и вычитание дробей:

а)  $\frac{17}{6x} + \frac{7}{6x}$ ;

г)  $\frac{3x+5}{8x-4} - \frac{5x-7}{8x-4} + \frac{4x-13}{8x-4}$ ;

б)  $\frac{6a-5}{a^3} - \frac{2a-5}{a^3}$ ;

д)  $\frac{7a-8b}{b-a} + \frac{6a-7b}{a-b}$ .

в)  $-\frac{7+m}{3m^2} + \frac{10+m}{3m^2}$ ;

### III. Устная работа.

Найдите наименьший общий знаменатель дробей:

а)  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{1}{2}$ ;

г)  $\frac{3}{7}$  и  $\frac{5}{21}$ ;

ж)  $\frac{1}{4}$  и  $\frac{1}{9}$ ;

б)  $\frac{2}{5}$  и  $\frac{1}{6}$ ;

д)  $\frac{3}{4}$  и  $\frac{1}{6}$ ;

з)  $\frac{2}{3}$  и  $\frac{5}{27}$ ;

в)  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{4}$ ;

е)  $\frac{5}{6}$  и  $\frac{2}{9}$ ;

и)  $\frac{1}{6}$  и 0,1.

### IV. Объяснение нового материала.

Выделим три случая, которые возникают при нахождении общего знаменателя, и приведем аналогичные примеры с алгебраическими дробями.

Случай 1. Знаменатели дробей не имеют общих делителей.

В этом случае наименьший общий знаменатель равен произведению знаменателей дробей.

Обыкновенные дроби:

$$\frac{1}{4} + \frac{4}{7} = \frac{7}{4 \cdot 7} + \frac{4 \cdot 4}{4 \cdot 7} = \frac{7}{28} + \frac{16}{28} = \frac{23}{28}.$$

Рациональные дроби:

$$1) \frac{2}{3a} + \frac{b}{c} = \frac{2 \cdot c}{3ac} + \frac{3ab}{3ac} = \frac{2c + 3ab}{3ac}.$$

$$2) \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} = \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} - \frac{a+b}{(a+b)(a-b)} = \\ = \frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{a-b-a-b}{a^2-b^2} = \frac{-2b}{a^2-b^2} = \frac{2b}{b^2-a^2}.$$

Случай 2. Знаменатель одной из дробей является делителем знаменателя второй дроби.

В этом случае знаменатель, который делится на другой, является наименьшим общим знаменателем дробей.

Обыкновенные дроби:

$$\frac{11}{12} - \frac{2}{3} = \frac{11}{12} - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{11}{12} - \frac{8}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Рациональные дроби:

$$1) \frac{1}{a^2b^2} - \frac{1}{ab} = \frac{1}{a^2b^2} - \frac{ab}{a^2b^2} = \frac{1-ab}{a^2b^2};$$

$$2) \frac{x+1}{x(x+y)} + \frac{3}{x+y} = \frac{x+1}{x(x+y)} + \frac{3x}{x(x+y)} = \frac{x+1+3x}{x(x+y)} = \frac{4x+1}{x(x+y)}.$$

Случай 3. Знаменатели дробей имеют общие делители, но знаменатель одной из дробей не является делителем знаменателя другой дроби.

В этом случае наименьший знаменатель состоит из нескольких множителей: общего делителя дробей и результатов деления на этот делитель.

Обыкновенные дроби:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3}{2 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12}.$$

Рациональные дроби:

$$1) \frac{3}{ab} - \frac{b}{2ac} = \frac{3 \cdot 2c}{2abc} - \frac{b \cdot b}{2abc} = \frac{6c}{2abc} - \frac{b^2}{2abc} = \frac{6c - b^2}{2abc};$$

$$2) \frac{x-1}{x^2+xy} - \frac{y-2}{y^2+xy} = \frac{x-1}{x(x+y)} - \frac{y-2}{y(x+y)} = \\ = \frac{y(x-1)}{xy(x+y)} - \frac{x(y-2)}{xy(x+y)} = \frac{xy - y - xy + 2x}{xy(x+y)} = \frac{2x - y}{xy(x+y)}.$$

## V. Формирование умений и навыков.

• Выполнение заданий по учебнику: № 73, 75, 76, 78 (а, г), 79 (б, г), 84 (а, в, д), 85 (а, в).

### № 85.

При выполнении этого задания учащиеся впервые будут складывать и вычитать дроби, в которых для нахождения обще-

го знаменателя необходимо сначала разложить на множители знаменатели исходных дробей. Важно, чтобы учащиеся осознавали это и использовали в дальнейшем при выполнении действий с рациональными дробями.

$$\begin{aligned} \text{в) } \frac{3}{ax-ay} + \frac{2}{by-bx} &= \frac{3}{a(x-y)} + \frac{2}{b(y-x)} = \\ &= \frac{3}{a(x-y)} - \frac{2}{b(x-y)} = \frac{3b-2a}{ab(x-y)}. \end{aligned}$$

## VI. Итоги урока.

– Как найти общий знаменатель дробей, если их знаменатели не имеют общих делителей?

– Как найти общий знаменатель дробей, если знаменатель одной дроби является делителем знаменателя другой дроби?

– Как найти общий знаменатель дробей, знаменатели которых имеют общий делитель, не совпадающий ни с одним из знаменателей этих дробей?

**Домашнее задание:** № 74, 77, 84 (б, г, е), 85 (б, г).

## Урок 9

### СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ДРОБЕЙ С РАЗНЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ

**Цель:** продолжить формирование умения складывать и вычитать рациональные дроби с разными знаменателями.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

Найдите общий знаменатель дробей:

а)  $\frac{1}{x}$  и  $\frac{1}{y}$ ;

г)  $\frac{1}{ax}$  и  $\frac{1}{ay}$ ;

ж)  $\frac{1}{x(x+3)}$  и  $\frac{1}{x}$ ;

б)  $\frac{1}{a^2}$  и  $\frac{1}{a}$ ;

д)  $\frac{1}{x+3}$  и  $\frac{1}{y}$ ;

з)  $\frac{1}{ac^2}$  и  $\frac{1}{a^2c}$ ;

в)  $\frac{1}{x-2}$  и  $\frac{1}{x+2}$ ;

е)  $\frac{1}{(x+1)^2}$  и  $\frac{1}{(x+1)^3}$ ;

и)  $\frac{1}{(a-2)^3}$  и  $\frac{1}{(a-2)^4}$ .

### III. Формирование умений и навыков.

- Выполнение заданий: № 86 (а, в), 87, 88, 92, 93.
- Игра «Дешифровщик».

Помимо христианства и ислама существует еще такая религия, как буддизм. Эта религия возникла в Древней Индии в VI–V веках до нашей эры. Сейчас буддизм распространен в Азии, его приверженцами являются несколько сотен миллионов человек. В отличие от других культов, священнослужителями здесь могут стать и мужчины, и женщины. Если вы верно упростите выражения и замените результаты соответствующими буквами, то узнаете, как называют буддийского священнослужителя.

$$1) \frac{y+1}{y^2-xy} - \frac{1-x}{x^2-xy}.$$

$$\text{Б. } \frac{x+y}{xy(y-x)}; \quad \text{Д. } \frac{x-y+2xy}{xy(y-x)}; \quad \text{М. } \frac{x+y}{x-y}; \quad \text{Н. } \frac{2x-y}{xy}.$$

$$2) \frac{y}{x-y} + \frac{x^2+y^2}{2xy-2x^2}.$$

$$\text{А. } \frac{x-y}{2x}; \quad \text{И. } \frac{1}{2x}; \quad \text{О. } \frac{y-x}{2x}; \quad \text{У. } \frac{y(x-y)}{2x}.$$

$$3) \frac{15}{(m+2)(m-3)} + \frac{12}{4-m^2}.$$

$$\text{Д. } \frac{3m}{m-3}; \quad \text{Н. } \frac{3}{(m-2)(m-3)}; \quad \text{Р. } \frac{-3}{(m+2)(m-3)}; \quad \text{М. } \frac{1}{m^2-4}.$$

$$4) \frac{2}{x^2-2x} + \frac{1}{2-x}.$$

$$\text{А. } \frac{x+2}{x^2-2x}; \quad \text{И. } \frac{2}{x^2-2x}; \quad \text{З. } -\frac{1}{x}; \quad \text{К. } \frac{x}{x-2}.$$

$$5) \frac{2b}{2b+c} - \frac{4b^2}{4b^2+4bc+c^2}.$$

$$\text{А. } \frac{2bc}{(2b+c)^2}; \quad \text{И. } \frac{2b}{2b+c}; \quad \text{О. } \frac{2b}{(2b+c)^2}; \quad \text{У. } \frac{2bc}{2b+c}.$$

Ответ: БОНЗА.



- Задание на карточках для сильных учащихся.

### Карточка 1

- 1) Упростите выражение:

$$\frac{1}{2-a} - \frac{1}{2+a} + \frac{a}{a^2-4} - \frac{a^2+4}{8a-2a^3}.$$

- 2) Вычислите значение выражения при  $x = 3,1$ :

$$\frac{2x-5}{x^2-6x+9} - \frac{x+8}{(3-x)^2} + \frac{10}{9+x^2-6x}.$$

### Карточка 2

- 1) Упростите выражение:

$$\frac{1}{a^2-8a+16} - \frac{1}{a^2+8a+16} + \frac{a}{a^2-16}.$$

- 2) Вычислите значение выражения при  $a = 4,5$ :

$$-\frac{2(a+4)}{a^3-8} + \frac{1}{2-a} - \frac{a+2}{a^2+2a+4}.$$

### Решение заданий карточки 1

$$\begin{aligned} 1) \frac{1}{2-a} - \frac{1}{2+a} + \frac{a}{a^2-4} - \frac{a^2+4}{8a-2a^3} &= \frac{1}{2-a} - \frac{1}{2+a} + \\ &+ \frac{a}{(a-2)(a+2)} - \frac{a^2+4}{2a(2-a)(2+a)} = \frac{1}{2-a} + \frac{1}{2+a} - \\ &- \frac{a}{(2-a)(2+a)} - \frac{a^2+4}{2a(2-a)(2+a)} = \\ &= \frac{2a(2+a) + 2a(2-a) - 2a^2 - a^2 - 4}{2a(2-a)(2+a)} = \\ &= \frac{4a + 2a^2 + 4a - 2a^2 - 3a^2 - 4}{2a(2-a)(2+a)} = \frac{8a - 3a^2 - 4}{2a(2-a)(2+a)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{2x-5}{x^2-6x+9} - \frac{x+8}{(3-x)^2} + \frac{10}{9+x^2-6x} &= \frac{2x-5}{(x-3)^2} - \frac{x+8}{(x-3)^2} + \\ &+ \frac{10}{(x-3)^2} = \frac{2x-5-x-8+10}{(x-3)^2} = \frac{x-3}{(x-3)^2} = \frac{1}{x-3}. \end{aligned}$$

при  $x = 3,1$ :  $\frac{1}{x-3} = \frac{1}{3,1-3} = \frac{1}{0,1} = 10$ .

### Решение заданий карточки 2

$$1) \frac{1}{a^2-8a+16} - \frac{1}{a^2+8a+16} + \frac{a}{a^2-16} = \frac{1}{(a-4)^2} - \frac{1}{(a+4)^2} +$$

$$+ \frac{a}{(a-4)(a+4)} = \frac{(a+4)^2 - (a-4)^2 + a(a-4)(a+4)}{(a-4)^2(a+4)^2} =$$

$$= \frac{a^2+8a+16 - a^2+8a-16 - a^3-16a}{(a-4)^2(a+4)^2} = -\frac{a^3}{(a^2-16)^2}.$$

$$2) -\frac{2(a+4)}{a^3-8} + \frac{1}{2-a} - \frac{a+2}{a^2+2a+4} = -\frac{2(a+4)}{(a-2)(a^2+2a+4)} +$$

$$+ \frac{1}{2-a} - \frac{a+2}{a^2+2a+4} = \frac{2a+8}{(2-a)(a^2+2a+4)} + \frac{1}{2-a} -$$

$$-\frac{a+2}{a^2+2a+4} = \frac{2a+8+a^2+2a+4 - (a+2)(2-a)}{(2-a)(a^2+2a+4)} =$$

$$\frac{a^2+4a+12-4+a^2}{(2-a)(a^2+2a+4)} = \frac{2a^2+4a+12}{8-a^3}.$$

### IV. Проверочная работа.

#### Вариант 1

Упростите выражение:

а)  $\frac{3}{5x^2y} - \frac{2}{3xy^2}$ ;

г)  $\frac{6}{5a-10} - \frac{2}{3a-6}$ ;

б)  $\frac{4}{y^2-4} - \frac{1}{y-2}$ ;

д)  $\frac{1}{x^2-xy} - \frac{1}{x-xy^2}$ .

в)  $-\frac{2}{a+b} + \frac{3a+3b}{a^2+2ab+b^2}$ ;

## Вариант 2

Упростите выражение:

а)  $\frac{2}{3x^2y^3} - \frac{3}{5x^3y^2}$ ;

г)  $\frac{5}{4a+8} - \frac{1}{3a+6}$ ;

б)  $\frac{1}{y-3} - \frac{6}{y^2-9}$ ;

д)  $\frac{1}{ab-b^2} - \frac{1}{a^2-ab}$ .

в)  $-\frac{3}{c-d} + \frac{4c-4d}{c^2-2cd+d^2}$ ;

### V. Итоги урока.

- Как найти общий знаменатель двух рациональных дробей?
- Как найти общий знаменатель трёх и более рациональных дробей?
- Как выполнить сложение или вычитание рациональных дробей с разными знаменателями?

**Домашнее задание:** № 86 (б, г), 89, 94, 102 (дополнительно).

## Урок 10

### СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ И ЦЕЛОГО ВЫРАЖЕНИЯ

**Цели:** формировать умение выполнять сложение и вычитание рациональных дробей и целых выражений; продолжить формирование умения преобразовывать рациональные дроби.

### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

Вычислите:

а)  $\frac{a}{a} + \frac{b}{a}$ ;

г)  $\frac{3}{a} + \frac{4a}{a}$ ;

ж)  $\frac{a+b}{a+b} - \frac{b}{a+b}$ ;

б)  $\frac{1}{c} - \frac{c}{c}$ ;

д)  $\frac{4m}{m} + \frac{5}{m}$ ;

з)  $\frac{1}{n-m} + \frac{n-m}{n-m}$ ;

в)  $\frac{2b}{b} - \frac{1}{b}$ ;

е)  $\frac{9a}{a} + \frac{7}{a}$ ;

и)  $\frac{c+d}{c+d} + \frac{2c}{c+d}$ .

### III. Объяснение нового материала.

При объяснении целесообразно использовать аналогию с числовыми выражениями.

Выполните сложение:  $2 + \frac{a}{b}$ .

Известно, что любое целое число может быть представлено в виде дроби со знаменателем 1.

Поэтому  $2 + \frac{a}{b} = \frac{2}{1} + \frac{a}{b}$ . Очевидно, что общим знаменателем этих дробей будет  $b$ .

$$\text{Имеем: } 2 + \frac{a}{b} = \frac{2}{1} + \frac{a}{b} = \frac{2b}{b} + \frac{a}{b} = \frac{2b+a}{b}.$$

Принцип сложения и вычитания рациональной дроби и целого числа вы могли увидеть и при выполнении устной работы. Любой многочлен может быть также представлен в виде рациональной дроби со знаменателем 1. В этом и состоит основная идея сложения и вычитания рациональных дробей и целых выражений.

Пример 1.

$$a + \frac{b}{c} = \frac{a}{1} + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}.$$

Пример 2.

$$\begin{aligned} a+b - \frac{a^2}{a-b} &= \frac{a+b}{1} - \frac{a^2}{a-b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a-b} - \frac{a^2}{a-b} = \\ &= \frac{a^2 - b^2}{a-b} - \frac{a^2}{a-b} = \frac{a^2 - b^2 - a^2}{a-b} = \frac{-b^2}{a-b} = \frac{b^2}{b-a}. \end{aligned}$$

Сделайте вывод о том, как складываются (вычитаются) рациональные дроби с целыми выражениями.

### IV. Формирование умений и навыков.

Все задания можно разбить на две группы:

1-я группа. Задания на сложение (вычитание) рациональных дробей с целыми выражениями: № 80, 82, 90 (а, в, д).

2-я группа. Задания на различные более сложные преобразования дробно-рациональных выражений: № 91 (а), 96 (б, г), 97 (а, в), 98 (а), 99 (а).

• Выполнение заданий по учебнику.

**№ 91.**

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{a^2+3a}{ab-5b+8a-40} - \frac{a}{b+8} = \frac{a^2+3a}{b(a-5)+8(a-5)} - \frac{a}{b+8} = \\ & = \frac{a^2+3a}{(a-5)(b+8)} - \frac{a}{b+8} = \frac{a^2-3a-a(a-5)}{(a-5)(b+8)} = \frac{a^2-3a-a^2+5a}{(a-5)(b+8)} = \\ & = \frac{2a}{(a-5)(b+8)}. \end{aligned}$$

**№ 99.**

Чтобы доказать тождественное равенство данных выражений, нужно преобразовать их.

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{3}{a^2-3a} + \frac{a^2}{a-3} = \frac{3}{a(a-3)} + \frac{a^2}{a-3} = \frac{3+a^3}{a(a-3)}; \\ & a+3 + \frac{9a+3}{a^2-3a} = \frac{a^3-3a^2+3a^2-9a+9a+3}{a(a-3)} = \frac{a^3+3}{a(a-3)}. \end{aligned}$$

Значит, данные выражения тождественно равны.

• Дополнительное задание. Запишите данные дроби в виде суммы целого выражения и дроби.

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{a^2-3a+4}{a-3}; \\ \text{б) } & \frac{x^2+4x-16}{x-4}. \end{aligned}$$

**Решение**

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{a^2-3a+4}{a-3} = \frac{a^2-3a}{a-3} + \frac{4}{a-3} = \frac{a(a-3)}{a-3} + \frac{4}{a-3} = a + \frac{4}{a-3}. \\ \text{б) } & \frac{x^2+4x-16}{x-4} = \frac{x^2-16}{x-4} + \frac{4x}{x-4} = \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} + \frac{4x}{x-4} = \\ & = x+4 + \frac{4x}{x-4}. \end{aligned}$$

## У. Итоги урока.

- Как найти общий знаменатель рациональных дробей?
- Как выполнить сложение или вычитание двух рациональных дробей с разными знаменателями?
- Как выполнить сложение или вычитание рациональной дроби и целого выражения?

Домашнее задание: № 81, 83, 90 (б, г, е), 91 (б), 97 (б, г).

## Урок 11

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1

#### Вариант 1

1. Сократите дробь:

а)  $\frac{14a^4b}{49a^3b^2}$ ;      б)  $\frac{3x}{x^2 + 4x}$ ;      в)  $\frac{y^2 - z^2}{2y + 2z}$ .

2. Представьте в виде дроби:

а)  $\frac{3x-1}{x^2} + \frac{x-9}{3x}$ ;      б)  $\frac{1}{2a-b} - \frac{1}{2a+b}$ ;      в)  $\frac{5}{c+3} - \frac{5c-2}{c^2+3c}$ .

3. Найдите значение выражения:

$\frac{a^2 - b}{a} - a$  при  $a = 0,2$ ;  $b = -5$ .

4. Упростите выражение:

$\frac{3}{x-3} - \frac{x+15}{x^2-9} - \frac{2}{x}$ .

5. При каких целых значениях  $a$  является целым числом значение выражения  $\frac{(a+1)^2 - 6a + 4}{a}$  ?

#### Вариант 2

1. Сократите дробь:

а)  $\frac{39x^3y}{26x^2y^2}$ ;      б)  $\frac{5y}{y^2 - 2y}$ ;      в)  $\frac{3a - 3b}{a^2 - b^2}$ .

2. Представьте в виде дроби:

а)  $\frac{3-2a}{2a} - \frac{1-a^2}{a^2}$ ;      б)  $\frac{1}{3x+y} - \frac{1}{3x-y}$ ;

в)  $\frac{4-3b}{b^2-2b} + \frac{3}{b-2}$ .

3. Найдите значение выражения:

$$\frac{x-6y^2}{2y} + 3y \quad \text{при } x = -8, y = 0,1.$$

4. Упростите выражение:

$$\frac{2}{x-4} - \frac{x+8}{x^2-16} - \frac{1}{x}.$$

5. При каких целых значениях  $b$  является целым числом значение выражения  $\frac{(b-2)^2 + 8b + 1}{b}$  ?

### Вариант 3

1. Сократите дробь:

а)  $\frac{22p^4q^2}{99p^5q}$ ;      б)  $\frac{7a}{a^2+5a}$ ;      в)  $\frac{x^2-y^y}{4x+4y}$ .

2. Представьте в виде дроби:

а)  $\frac{y-20}{4y} + \frac{5y-2}{y^2}$ ;      б)  $\frac{1}{5c-d} - \frac{1}{5c+d}$ ;

в)  $\frac{7}{a+5} - \frac{7a-3}{a^2+5a}$ .

3. Найдите значение выражения:

$$\frac{14b^2-c}{7b} - 2b \quad \text{при } b = 0,5; c = -14.$$

4. Упростите выражение:

$$\frac{5}{x-7} - \frac{2}{x} - \frac{3x}{x^2-49} + \frac{21}{49-x^2}.$$

5. При каких целых значениях  $p$  является целым числом значение выражения  $\frac{(2p+1)^2 - 3p + 2}{p}$  ?

## Вариант 4

1. Сократите дробь:

а)  $\frac{75b^5c^3}{50b^4c^4}$ ; б)  $\frac{2b}{b^2-9b}$ ; в)  $\frac{7x-7y}{x^2-y^2}$ .

2. Представьте в виде дроби:

а)  $\frac{3b+7}{3b} - \frac{b^2-5}{b^2}$ ; б)  $\frac{1}{4p+q} - \frac{1}{4p-q}$ ;

в)  $\frac{5-4y}{y^2-6y} + \frac{4}{y-6}$ .

3. Найдите значение выражения:

$$\frac{12p^2 - q}{4p} - 3p \quad \text{при } p = -0,35, q = 28.$$

4. Упростите выражение:

$$\frac{4}{y} - \frac{2}{y-5} + \frac{2y}{25-y^2} - \frac{10}{y^2-25}$$

5. При каких целых значениях  $x$  является целым числом значение выражения  $\frac{(3x-1)^2 - 6x + 6}{x}$ ?

## РЕШЕНИЕ ВАРИАНТОВ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

### Вариант 1

1. а)  $\frac{14a^4b}{49a^3b^2} = \frac{2a}{7b}$ ; б)  $\frac{3x}{x^2+4x} = \frac{3x}{x(x+4)} = \frac{3}{x+4}$ ;

в)  $\frac{y^2-z^2}{2y+2z} = \frac{(y-z)(y+z)}{2(y+z)} = \frac{y-z}{2}$ .

2. а)  $\frac{3x-1}{x^2} + \frac{x-9}{3x} = \frac{3(3x-1) + x(x-9)}{3x^2} = \frac{9x-3+x^2-9x}{3x^2} =$   
 $= \frac{x^2-3}{3x^2}$ ;



$$6) \frac{1}{2a-b} - \frac{1}{2a+b} = \frac{2a+b-2a+b}{(2a-b)(2a+b)} = \frac{2b}{4a^2-b^2};$$

$$в) \frac{5}{c+3} - \frac{5c-2}{c^2+3c} = \frac{5}{c+3} - \frac{5c-2}{c(c+3)} = \frac{5c-5c+2}{c(c+3)} = \frac{2}{c^2+3c}.$$

$$3. \frac{a^2-b}{a} - a = \frac{a^2-b-a^2}{a} = \frac{-b}{a}$$

при  $a = 0,2, b = -5$ :  $\frac{-b}{a} = \frac{5}{0,2} = 25.$

$$4. \frac{3}{x-3} - \frac{x+15}{x^2-9} - \frac{2}{x} = \frac{3}{x-3} - \frac{x+15}{(x-3)(x+3)} - \frac{2}{x} =$$

$$= \frac{3x(x+3) - x(x+15) - 2(x^2-9)}{x(x-3)(x+3)} =$$

$$\frac{3x^2+9x-x^2-15x-2x^2+18}{x(x-3)(x+3)} =$$

$$= \frac{18-6x}{x(x-3)(x+3)} = -\frac{6(x-3)}{x(x-3)(x+3)} = -\frac{6}{x(x+3)} = -\frac{6}{x^2+3x}.$$

$$5. \frac{(a+1)^2-6a+4}{a} = \frac{a^2+2a+1-6a+4}{a} = \frac{a^2-4a+5}{a} =$$

$$= a-4+\frac{5}{a}.$$

Чтобы исходное выражение принимало целые значения, нужно, чтобы  $\frac{5}{a}$  было целым числом.

Ответ:  $\pm 1; \pm 5.$

### Вариант 2

$$1. а) \frac{39x^3y}{26x^2y^2} = \frac{3x}{2y}; \quad б) \frac{5y}{y^2-2y} = \frac{5y}{y(y-2)} = \frac{5}{y-2};$$

$$в) \frac{3a-3b}{a^2-b^2} = \frac{3(a-b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{3}{a+b}.$$

$$2. а) \frac{3-2a}{2a} - \frac{1-a^2}{a^2} = \frac{a(3-2a) - 2(1-a^2)}{2a^2} =$$

$$= \frac{3a-2a^2-2+2a^2}{2a^2} = \frac{3a-2}{2a^2};$$

$$6) \frac{1}{3x+y} - \frac{1}{3x-y} = \frac{3x-y-3x-y}{(3x+y)(3x-y)} = \frac{-2y}{9x^2-y^2} = \frac{2y}{y^2-9x^2};$$

$$B) \frac{4-3b}{b^2-2b} + \frac{3}{b-2} = \frac{4-3b}{b(b-2)} + \frac{3}{b-2} = \frac{4-3b+3b}{b(b-2)} = \frac{4}{b^2-2b}.$$

$$3. \frac{x-6y^2}{2y} + 3y = \frac{x-6y^2+6y^2}{2y} = \frac{x}{2y}$$

при  $x = -8, y = 0,1$ :  $\frac{x}{2y} = \frac{-8}{0,2} = -40$ .

$$4. \frac{2}{x-4} - \frac{x+8}{x^2-16} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x-4} - \frac{x+8}{(x-4)(x+4)} - \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{2x(x+4) - x(x+8) - (x+4)(x-4)}{x(x+4)(x-4)} =$$

$$\frac{2x^2+8x-x^2-8x-x^2+16}{x(x+4)(x-4)} = \frac{16}{x^3-16x}.$$

$$5. \frac{(b-2)^2+8b+1}{b} = \frac{b^2-4b+4+8b+1}{b} = \frac{b^2+4b+5}{b} =$$

$$= b+4+\frac{5}{b}.$$

Ответ:  $\pm 1; \pm 5$ .

### Вариант 3

$$1. a) \frac{22p^4q^2}{99p^5q} = \frac{2q}{9p}; \quad б) \frac{7a}{a^2+5a} = \frac{7a}{a(a+5)} = \frac{7}{a+5};$$

$$B) \frac{x^2-y^2}{4x+4y} = \frac{(x-y)(x+y)}{4(x+y)} = \frac{x-y}{4}.$$

$$2. a) \frac{y-20}{4y} + \frac{5y-2}{y^2} = \frac{y(y-20)+4(5y-2)}{4y^2} =$$

$$= \frac{y^2-20y+20y-8}{4y^2} = \frac{y^2-8}{4y^2};$$

$$6) \frac{1}{5c-d} - \frac{1}{5c+d} = \frac{5c+d-5c+d}{(5c-d)(5c+d)} = \frac{2d}{25c^2-d^2};$$

$$в) \frac{7}{a+5} - \frac{7a-3}{a^2+5a} = \frac{7}{a+5} - \frac{7a-3}{a(a+5)} = \frac{7a-7a+3}{a(a+5)} = \frac{3}{a^2+5a}.$$

$$3. \frac{14b^2-c}{7b} - 2b = \frac{14b^2-c-14b^2}{7b} = -\frac{c}{7b}$$

$$\text{при } b = 0,5; c = -14: -\frac{c}{7b} = \frac{14}{3,5} = 4.$$

$$\begin{aligned} 4. \frac{5}{x-7} - \frac{2}{x} - \frac{3x}{x^2-49} + \frac{21}{49-x^2} &= \frac{5}{x-7} - \frac{2}{x} - \frac{3x}{(x-7)(x+7)} - \\ &- \frac{21}{(x-7)(x+7)} = \frac{5x(x+7) - 2(x^2-49) - 3x^2 - 21x}{x(x-7)(x+7)} = \\ &= \frac{5x^2 + 35x - 2x^2 + 98 - 3x^2 - 21x}{x(x-7)(x+7)} = \frac{14x + 98}{x(x-7)(x+7)} = \\ &= \frac{14(x+7)}{x(x-7)(x+7)} = \frac{14}{x^2-7x}. \end{aligned}$$

$$5. \frac{(2p+1)^2 - 3p + 2}{p} = \frac{4p^2 + 4p + 1 - 3p + 2}{p} = \frac{4p^2 + p + 3}{p} = 4p + 1 + \frac{3}{p}.$$

Ответ:  $\pm 1; \pm 3$ .

#### Вариант 4

$$1. \text{ а) } \frac{75b^5c^3}{50b^4c^4} = \frac{3b}{2c}; \quad \text{ б) } \frac{2b}{b^2-9b} = \frac{2b}{b(b-9)} = \frac{2}{b-9};$$

$$\text{ в) } \frac{7x-7y}{x^2-y^2} = \frac{7(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{7}{x+y}.$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ а) } \frac{3b+7}{3b} - \frac{b^2-5}{b^2} &= \frac{b(3b+7) - 3(b^2-5)}{3b^2} = \\ &= \frac{3b^2 + 7b - 3b^2 + 15}{3b^2} = \frac{7b+15}{3b^2}; \end{aligned}$$

$$\text{ б) } \frac{1}{4p+q} - \frac{1}{4p-q} = \frac{4p-q-4p-q}{(4p+q)(4p-q)} = \frac{-2q}{16p^2-q^2} =$$

$$= \frac{2q}{q^2 - 16p^2};$$

$$\text{в) } \frac{5-4y}{y^2-6y} + \frac{4}{y-6} = \frac{5-4y}{y(y-6)} + \frac{4}{y-6} = \frac{5-4y+4y}{y(y-6)} =$$

$$= \frac{5}{y^2-6y}.$$

$$3. \frac{12p^2-q}{4p} - 3p = \frac{12p^2-q-12p^2}{4p} = -\frac{q}{4p}$$

$$\text{при } p = -0,35, q = 28: -\frac{q}{4p} = \frac{28}{1,4} = 20.$$

$$4. \frac{4}{y} - \frac{2}{y-5} + \frac{2y}{25-y^2} - \frac{10}{y^2-25} = \frac{4}{y} - \frac{2}{y-5} - \frac{2y}{(y-5)(y+5)} -$$

$$- \frac{10}{(y-5)(y+5)} = \frac{4(y^2-25) - 2y(y+5) - 2y^2 - 10y}{y(y-5)(y+5)} =$$

$$= \frac{4y^2 - 100 - 2y^2 - 10y - 2y^2 - 10y}{y(y-5)(y+5)} = \frac{-20y - 100}{y(y-5)(y+5)} =$$

$$= -\frac{20(y+5)}{y(y-5)(y+5)} = -\frac{20}{y(y-5)} = \frac{20}{y(5-y)} = \frac{20}{5y-y^2}.$$

$$5. \frac{(3x-1)^2 - 6x + 6}{x} = \frac{9x^2 + 6x + 1 - 6x + 6}{x} = \frac{9x^2 + 7}{x} = 9x + \frac{7}{x}.$$

Ответ:  $\pm 1; \pm 7$ .

## Урок 12

### ПРАВИЛА УМНОЖЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ И ВОЗВЕДЕНИЯ ИХ В СТЕПЕНЬ

**Цель:** формировать умение умножать рациональные дроби и возводить их в степень.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

## II. Устная работа.

Вычислите:

а)  $\frac{1}{7} \cdot 5$ ;

г)  $\frac{4}{11} \cdot \frac{1}{4}$ ;

ж)  $\left(-\frac{2}{7}\right)^2$ ;

б)  $4 \cdot \frac{2}{9}$ ;

д)  $0,5 \cdot \frac{2}{3}$ ;

з)  $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ ;

в)  $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}$ ;

е)  $\left(\frac{1}{9}\right)^2$ ;

и)  $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ ;

## III. Объяснение нового материала.

Объяснение проводить, используя аналогию с обыкновенными дробями.

Сформулируйте правила умножения рациональных дробей и возведения их в степень.

Эти правила выносятся на доску.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Рассмотрим несколько примеров из учебника, показывающих применение данных правил.

## IV. Формирование умений и навыков.

• Выполнение заданий по учебнику: № 108, 109, 111 (а, г), 115, 116, 112, 114,

Для простоты преобразования дробных выражений желательно в буквенном выражении на первое место ставить коэффициент и располагать буквы, содержащиеся в числителе и знаменателе дроби, в соответствующем порядке.

### № 109.

$$б) \frac{2,5}{2a^2} \cdot \frac{4a^3}{5b^2} = \frac{2,5 \cdot 4a^3}{2 \cdot 5a^2b^2} = \frac{a}{b^2}.$$

• Дополнительное задание.

### № 118.

Возведём обе части равенства  $a - \frac{5}{a} = 2$  в квадрат.

Получим:  $\left(a - \frac{5}{a}\right)^2 = 2^2$ ;  $a^2 - 2a \cdot \frac{5}{a} + \frac{25}{a^2} = 4$ ;  $a^2 - 10 + \frac{25}{a^2} = 4$ ;  
 $a^2 + \frac{25}{a^2} = 14$ .

• Работа на карточках для сильных учащихся.

### Карточка 1

1. Выполните умножение:

а)  $\frac{24p^6}{35q^4} \cdot \frac{49q}{16p^4}$ ;

б)  $\frac{28m^5}{23m^4} \cdot 46n^6$ .

в)  $\frac{45xy}{7z^2} \cdot \frac{14xz^3}{81y^2} \cdot \frac{27y^3}{5xz}$ .

2. Найдите значение выражения:

$\frac{m^8}{8n^9} \cdot \frac{12n^{10}}{m^{12}} \cdot \frac{m}{3n^3}$  при  $m = 2$ ,  $n = -3$ .

### Карточка 2

1. Выполните умножение:

а)  $\frac{a^3b}{15c} \cdot \frac{3c}{a^2b^2}$ ;

б)  $\frac{2p^4q^2}{5m^3} \cdot \frac{15m^8}{4p^5q^7}$ ;

в)  $\frac{32ab}{13c^3} \cdot \frac{52bc^2}{128a^3} \cdot \frac{54a^2c}{81b^3}$ .

2. Найдите значение выражения:

$\frac{x^3y^2}{5c} \cdot \frac{4c}{15x^2y^3} \cdot \frac{25xy^4}{c}$  при  $c = 2$ ,  $x = 6$ ,  $y = -1$ .

### V. Итоги урока.

– Сформулируйте правило умножения рациональных дробей.

– Сформулируйте правило возведения рациональной дроби в степень.

– Как удобно располагать буквы и числа в числителе и знаменателе перемножаемых дробей?

**Домашнее задание:** № 110, 11 (б, в), 113, 117.

## Урок 13

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДРОБНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ДЕЙСТВИЕ УМНОЖЕНИЯ

**Цель:** продолжить формирование умения выполнять умножение рациональных дробей.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

Выполните действия:

а)  $\frac{a}{3} \cdot \frac{1}{2}$ ;

г)  $\frac{5}{x} \cdot 2x$ ;

ж)  $\left(\frac{3}{x}\right)^2$ ;

б)  $\frac{4}{x} \cdot \frac{a}{7}$ ;

д)  $\frac{2}{n} \cdot \frac{m}{4}$ ;

з)  $\left(\frac{1}{2a}\right)^3$ ;

в)  $2 \cdot \frac{a}{2b}$ ;

е)  $4a \cdot \frac{a}{8}$ ;

и)  $\left(\frac{n^4}{5}\right)^2$ .

#### III. Формирование умений и навыков.

На этом уроке задания направлены на сокращение полученных при умножении дробей.

• Выполнение заданий по учебнику: № 119 (а, в, д), 121, 120 (а, в), 123, 125, 127.

#### № 123.

$$\begin{aligned} \text{г) } \frac{(5-y)^2}{2y+12} \cdot \frac{y^2-36}{2y-10} &= \frac{(5-y)^2 \cdot (y-6)(y+6)}{2(y+6) \cdot 2(y-5)} = \frac{(y-5)^2(y-6)}{4(y-5)} = \\ &= \frac{(y-5)(y-6)}{4} = \frac{y^2-11y+30}{4}. \end{aligned}$$

#### № 125.

$$\begin{aligned} \text{б) } \frac{bx+3b}{x^2-25} \cdot \frac{25-10x+x^2}{ax+3a} &= \frac{b(x+3) \cdot (5-x)^2}{(x-5)(x+5) \cdot a(x+3)} = \\ &= \frac{b(x-5)^2}{a(x-5)(x+5)} = \frac{b(x-5)}{a(x+5)} = \frac{bx-5b}{ax+5a}. \end{aligned}$$

**№ 127.**

$$\text{б) } \frac{1-a^2}{4a+8b} \cdot \frac{a^2+4ab+4b^2}{3-3a} = \frac{(1-a)(1+a) \cdot (a+2b)^2}{4(a+2b) \cdot 3(1-a)} =$$

$$= \frac{(1+a)(a+2b)}{12} = \frac{a^2+2ab+a+2b}{12}.$$

$$\text{г) } \frac{b^3+8}{18b^2+27b} \cdot \frac{2b+3}{b^2-2b+4} = \frac{(b+2)(b^2-2b+4) \cdot (2b+3)}{9b(2b+3) \cdot (b^2-2b+4)} = \frac{b+2}{9b}.$$

• **Дополнительное задание.** Упростите выражение:

$$\text{а) } \frac{a^{2m}}{b^n} : \frac{a^{5m}}{b^{2n}}, \text{ где } m \text{ и } n \text{ – натуральные числа.}$$

$$\text{б) } \frac{a^{n+3} \cdot b^{n+6}}{c^{n+7}} : \frac{a^{n+1} \cdot b^{n+5}}{c^{n+9}}, \text{ где } n \text{ – натуральное число.}$$

**Решение**

$$\text{а) } \frac{a^{2m}}{b^n} : \frac{a^{5m}}{b^{2n}} = \frac{a^{2m} \cdot b^{2n}}{b^n \cdot a^{5m}} = a^{2m-5m} \cdot b^{2n-n} = a^{-3m} \cdot b^n.$$

$$\text{б) } \frac{a^{n+3} \cdot b^{n+6}}{c^{n+7}} : \frac{a^{n+1} \cdot b^{n+5}}{c^{n+9}} = \frac{a^{n+3} \cdot b^{n+6}}{c^{n+7}} \cdot \frac{c^{n+9}}{a^{n+1} b^{n+5}} = \frac{a^{n+3} b^{n+6} c^{n+9}}{a^{n+1} b^{n+5} c^{n+7}} =$$

$$a^{n+3-(n+1)} \cdot b^{n+6-(n+5)} c^{n+9-(n+7)} = a^2 b c^2.$$

**IV. Самостоятельная работа с последующей проверкой.**

Учащиеся выполняют задания, отдельно выписывая ответы. Затем проводится взаимопроверка, полученные ответы сравниваются с верными, записанными учителем заранее на откидной части доски.

**Вариант 1**

Выполните действия:

$$1) \frac{6}{a} \cdot \frac{b}{10};$$

$$4) \frac{m^2}{16} \cdot \frac{24}{mn};$$

$$7) \frac{10x^2y^2}{9a^2} \cdot \frac{27a^3}{5xy};$$

$$2) \frac{4}{x} \cdot \frac{2x}{5};$$

$$5) \frac{6x^2}{5y} \cdot \frac{10y^3}{3x};$$

$$8) \frac{8a^{17}}{b^{17}} \cdot \frac{b^{20}}{24a^{15}};$$

$$3) \frac{18}{c^4} \cdot \frac{c^3}{24};$$

$$6) 2a^2 \cdot \frac{b}{3a^2};$$

$$9) \frac{3x^2}{5y^3} \cdot \frac{2y^2}{9x^3} \cdot \frac{5y}{3x}.$$



Отвeты:

|                 |               |                |                 |         |                |        |                    |                  |
|-----------------|---------------|----------------|-----------------|---------|----------------|--------|--------------------|------------------|
| 1               | 2             | 3              | 4               | 5       | 6              | 7      | 8                  | 9                |
| $\frac{3b}{5a}$ | $\frac{8}{5}$ | $\frac{3}{4c}$ | $\frac{3m}{2n}$ | $4xy^2$ | $\frac{2b}{3}$ | $6axy$ | $\frac{a^2b^3}{3}$ | $\frac{2}{9x^2}$ |

### Вариант 2

Выполните действия:

- 1)  $\frac{8}{c} \cdot \frac{d}{14}$ ;      4)  $\frac{1}{9x^3} \cdot \frac{3x}{2a^2}$ ;      7)  $\frac{2m^3}{35a^3b^2} \cdot \frac{7a^2b}{6m^3}$ ;  
2)  $\frac{4x}{y} \cdot \frac{y}{12x}$ ;      5)  $\frac{8c}{21d^2} \cdot \frac{7d}{6c^2}$ ;      8)  $\frac{4m^4}{n^3} \cdot \frac{n^5}{2m^6}$ ;  
3)  $\frac{12x^5}{25} \cdot \frac{15}{8x^2}$ ;      6)  $\frac{4x^2}{3y} \cdot \frac{1}{8x}$ ;      9)  $\frac{7p^4}{10q^3} \cdot \frac{5q}{14p^2} \cdot \frac{4q^4}{3p}$ .

Отвeты:

|                 |               |                   |                     |                 |                |                  |                    |                  |
|-----------------|---------------|-------------------|---------------------|-----------------|----------------|------------------|--------------------|------------------|
| 1               | 2             | 3                 | 4                   | 5               | 6              | 7                | 8                  | 9                |
| $\frac{4d}{7c}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{9x^3}{10}$ | $\frac{1}{6a^2x^2}$ | $\frac{4}{9cd}$ | $\frac{x}{6y}$ | $\frac{1}{15ab}$ | $\frac{2n^2}{m^2}$ | $\frac{pq^2}{3}$ |

За каждый верный ответ выставляется 1 балл.

Критерии оценки:

«5» – 10 баллов;

«4» – 9, 8 баллов;

«3» – 7, 6 баллов;

«2» – менее 6 баллов.

### V. Итоги урока.

– Сформулируйте правило умножения рациональных дробей.

– Какие знания и умения необходимы, чтобы сократить рациональную дробь, полученную в результате умножения?

Домашнее задание: № 119 (б, г, е), 120 (б, г), 124, 126 (б, г).

## Урок 14

### ПРАВИЛО ДЕЛЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

**Цель:** изучить правило деления рациональных дробей и формировать умение его применять.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

Вычислите:

а)  $\frac{1}{6} \cdot 5$ ;

г)  $7 : \frac{1}{3}$ ;

ж)  $\frac{1}{5} : \frac{2}{3}$ ;

б)  $\frac{1}{2} : 3$ ;

д)  $\frac{1}{4} : \frac{1}{3}$ ;

з)  $\frac{5}{7} : \frac{6}{7}$ ;

в)  $4 \cdot \frac{2}{15}$ ;

е)  $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4}$ ;

и)  $\frac{4}{5} : 8$ .

#### III. Объяснение нового материала.

Сформулируйте правило деления рациональных дробей (правило выносится на доску):

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$$

Рассмотрим несколько примеров из учебника, показывающих применение этого правила.

#### IV. Формирование умений и навыков.

Отрабатываем правило деления рациональных дробей на простых примерах: если числитель и знаменатель делимых дробей являются одночленами.

• Выполнение заданий по учебнику: № 132 (а, в, д, ж), 133, 135.

Как и при умножении дробей, выполняя деление, важно следить за рациональностью проводимых записей.

#### № 133.

а)  $\frac{6x^2}{5y} : \frac{3x}{10y^3} = \frac{6x^2}{5y} \cdot \frac{10y^3}{3x} = \frac{6 \cdot 10x^2y^3}{3 \cdot 5xy} = 4xy^2$ .

$$в) \frac{3ab}{4xy} : \left( -\frac{21a^2b}{10x^2y} \right) = \frac{3ab}{4xy} \cdot \left( -\frac{10x^2y}{21a^2b} \right) = -\frac{3 \cdot 10ab \cdot x^2y}{4 \cdot 21xy \cdot a^2b} = -\frac{5x^2}{14a}.$$

• **Дополнительное задание.** Выполните действия:

$$а) \frac{a}{3b} : \frac{a}{6b} \cdot 2a;$$

$$г) x^3y^2 : \frac{1}{x^2} : y^2;$$

$$б) \frac{mn}{x} \cdot \frac{x^2}{n^2} : \frac{1}{mx};$$

$$д) \frac{2ab}{3c} : \frac{1}{6ac} : (2bc);$$

$$в) 3xy^2 \cdot \frac{x}{y} : \frac{6x^2}{y};$$

$$е) \frac{3m^2}{2n^2} : \frac{3m}{10n} : (15mn).$$

• **Задания на карточках для сильных учащихся.**

### Карточка 1

Выполните действия:

$$а) \frac{5x-5y}{x} : \frac{y-x}{2x^2};$$

$$б) \frac{2a^2}{25-5a} : \frac{10a}{(a-5)^2};$$

$$в) \frac{p^2+4p+4}{p-2} : (p^2-4) : \frac{3}{2p-4}.$$

### Карточка 2

Выполните действия:

$$а) \frac{a}{ab-b^2} : \frac{a^2}{b^2-a^2};$$

$$б) \frac{n^2-4}{3} : (2-n)^2;$$

$$в) \frac{a^2-6a+9}{a+3} : (a^2-9) : \frac{2}{3a+9}.$$

## V. Итоги урока.

- Сформулируйте правило деления рациональных дробей.
- Как удобно располагать буквы и числа в числителе и знаменателе делимых дробей?

**Домашнее задание:** № 132 (б, г, е, з), 134, 136.

## Урок 15

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДРОБНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ДЕЙСТВИЕ ДЕЛЕНИЯ

**Цель:** продолжить формирование умения выполнять деление рациональных дробей.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

Вычислите:

а)  $\frac{1}{5} : \frac{1}{2}$ ;

г)  $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ ;

ж)  $\frac{2}{5} : \frac{1}{2}$ ;

б)  $\frac{2}{3} : 5$ ;

д)  $\left(-\frac{4}{7}\right)^2$ ;

з)  $\frac{4}{11} : \frac{8}{9}$ ;

в)  $4 : \frac{1}{7}$ ;

е)  $\frac{4}{9} : 2$ ;

и)  $\frac{1}{2} : \frac{3}{8}$ .

#### III. Формирование умений и навыков.

На этом уроке выполняем деление дробей, у которых числитель и (или) знаменатель являются многочленами. Вам пригодится умение раскладывать многочлен на множители и сокращать дробь.

• Выполнение заданий по учебнику: № 137 (а, в, д, ж), 138, 139, 142.

#### № 139.

б)  $\frac{2a^3 - a^2b}{36b^2} : \frac{2a - b}{9b^3} = \frac{a^2(2a - b) \cdot 9b^3}{36b^2 \cdot (2a - b)} = \frac{a^2b}{4}$ .

г)  $\frac{9p^2 - 1}{pq - 2q} : \frac{1 - 3p}{3p - 6} = \frac{(3p - 1)(3p + 1) \cdot 3(p - 2)}{q(p - 2)(1 - 3p)} = -\frac{3(3p + 1)}{q}$ .

#### № 142.

б)  $\frac{ap^2 - 9a}{p^3 - 8} : \frac{p + 3}{2p - 4} = \frac{a(p^2 - 9) \cdot 2(p - 2)}{(p - 2)(p^2 + 2p + 4) \cdot (p + 3)} =$

$$= \frac{2a(p-3)(p+3)}{(p^2+2p+4)(p+3)} = \frac{2a(p-3)}{p^2+2p+4}.$$

• **Дополнительное задание.** Выполните деление:

$$\text{а) } \frac{a^2+4a+4}{2a-2} : \frac{3a+6}{a^2-a}; \quad \text{в) } \frac{2z-2y}{(2z+2y)^3} : \frac{(2y-2z)^3}{(2y+2z)^2};$$

$$\text{б) } \frac{3x-3x^2}{2y+1} : \frac{x^2-2x+1}{4y^2-1}; \quad \text{г) } \frac{(x-2)^2}{(x-1)^2} : \frac{(4-2x)^3}{(3-3x)^2}.$$

**Решение**

$$\text{б) } \frac{3x-3x^2}{2y+1} : \frac{x^2-2x+1}{4y^2-1} = \frac{3x(1-x) \cdot (2y-1)(2y+1)}{(2y+1) \cdot (x-1)^2} = \\ = \frac{3x(2y-1)}{1-x}.$$

$$\text{г) } \frac{(x-2)^2}{(x-1)^2} : \frac{(4-2x)^3}{(3-3x)^2} = \frac{(x-2)^2 \cdot (3-3x)^2}{(x-1)^2 \cdot (4-2x)^3} = \frac{(x-2)^2 \cdot 9(1-x)^2}{(x-1)^2 \cdot 8(2-x)^3} = \\ = \frac{9(2-x)^2(x-1)^2}{8(x-1)^2 \cdot (2-x)^3} = \frac{9}{8(2-x)}.$$

• **Игра «Дешифровщик».**

Когда астрономы начали исследование Вселенной с помощью радиотелескопов, они обнаружили, что многие звёзды меняют интенсивность и частоту излучаемых ими волн.

Однако некоторые из звёзд испускают постоянный поток волн, который меняется только в зависимости от времени. Долгое время ученые не могли объяснить природу этого явления.

Говорили, например, что это радиостанции, с помощью которых неизвестные нам разумные существа ищут во Вселенной собратьев по разуму.

Но исследования, проведенные с помощью искусственных спутников Земли, показали, что эти звёзды являются просто звёздами огромной величины и состоят из раскаленной материи.

Вы узнаете, как называются эти необычные звёзды, если правильно выполните все задания и составите слово из полученных букв.

Учащиеся выполняют задания по вариантам: первый вариант получает первую, третью, пятую и седьмую буквы данного слова, а второй – вторую, четвёртую, шестую и восьмую.

### Вариант 1

$$1) \left(\frac{x}{y^2}\right)^3 : \left(\frac{y}{2x} \cdot \frac{x^2}{y^3}\right)^2.$$

Д.  $\frac{y^2}{4x}$ ;      К.  $\frac{2y}{x}$ ;      Н.  $\frac{1}{2y}$ ;      П.  $\frac{4x}{y^2}$ .

$$2) \frac{a-b}{a+3b} \cdot \frac{a^2-9b^2}{a^2-b^2}.$$

З.  $\frac{1}{a+b}$ ;      Л.  $\frac{a-3b}{a+b}$ ;      М.  $\frac{a+3b}{a-b}$ ;      Р.  $\frac{3b-a}{a+b}$ .

$$3) \frac{m^2n^3}{m^2-2mn+n^2} : \frac{2n^2}{n^2-mn}.$$

К.  $\frac{mn}{n-m}$ ;      М.  $\frac{mn^2}{m-n}$ ;      С.  $\frac{m^2n^2}{n-m}$ ;      Т.  $\frac{m^2n^2}{m-n}$ .

$$4) \frac{a^2-b^2}{4a^4b^2} : \left(\frac{a+b}{3a^2b}\right)^2.$$

Н.  $\frac{3(a-b)}{4(a+b)}$ ;      Р.  $\frac{9(a-b)}{4(a+b)}$ ;      Т.  $\frac{a-b}{a+b}$ ;      Х.  $\frac{3(a-b)}{a+b}$ .

### Вариант 2

$$1) \left(\frac{m^2}{n^3}\right)^3 : \left(\frac{2m^4}{n^5}\right)^2.$$

А.  $\frac{n^2}{4m^2}$ ;      Е.  $\frac{1}{2m^2}$ ;      О.  $\frac{n}{2m}$ ;      У.  $\frac{1}{4m^2}$ .

$$2) \frac{x^2-4x}{8a^3} : \frac{x^2-16}{16a^4}.$$

И.  $\frac{ax^2}{x-4}$ ;      У.  $\frac{ax}{x+4}$ ;      Б.  $\frac{2ax}{x+4}$ ;      Ю.  $\frac{2ax}{x-4}$ .

$$3) \frac{1}{a^2 - 4b^2} \cdot (4b^2 - 4ab + a^2).$$

$$\text{А. } \frac{a-2b}{a+2b}; \quad \text{И. } \frac{2b-a}{2b+a}; \quad \text{О. } \frac{a+2b}{a-2b}; \quad \text{У. } \frac{2b+a}{2b-a}.$$

$$4) \left( \frac{x-y}{x^2 y} \right)^2 \cdot \frac{x^3 y^3}{x^2 - 2xy + y^2}.$$

$$\text{И. } \frac{x}{y}; \quad \text{Т. } \frac{x-y}{x}; \quad \text{С. } \frac{x-y}{y}; \quad \text{Ы. } \frac{y}{x}.$$

Ответ: ПУЛЬСАРЫ.

#### IV. Итоги урока.

- Сформулируйте правило деления рациональных дробей.
- Что нужно сделать, чтобы сократить рациональную дробь?
- Какие существуют способы разложения многочлена на множители?

Домашнее задание: № 137 (б, г, е, з), 140, 141.

### Урок 16

#### СОВМЕСТНЫЕ ДЕЙСТВИЯ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ ДРОБЯМИ

**Цель:** формировать умение упрощать выражения, содержащие различные действия с рациональными дробями.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Проверочная работа.

##### Вариант 1

Выполните действия:

$$1) \frac{y}{x} \cdot \frac{x^2 - xy}{y^2};$$

$$2) \frac{ax - xy}{a} : \frac{a^2 - ay}{x};$$

$$3) \frac{2}{4x^2 - y^2} \cdot \frac{y - 2x}{4x};$$

$$4) \frac{a^2 - 6a + 9}{a^2 - 4} : \frac{2a - 6}{a + 2} \cdot (a - 2)^2.$$

## Вариант 2

Выполните действия:

$$1) \frac{b^2}{2a} \cdot \frac{6a}{ab-b^2};$$

$$2) \frac{ab+ac}{bc} : \frac{ab-ac}{bc^2};$$

$$3) \frac{x}{1-9x^2} \cdot \frac{3x-1}{5x^2};$$

$$4) \frac{x^2-9}{x^2+4x+4} : \frac{3-x}{3x+6} \cdot \frac{x}{x+3}.$$

### III. Объяснение нового материала.

Необходимо разобрать примеры 1 и 2 из учебника. Вопросы о преобразовании «многоэтажных» дробей и вычислении среднего гармонического ряда целесообразно рассмотреть на следующих уроках.

### IV. Формирование умений и навыков.

• Выполнение заданий по учебнику: № 148 (а, в), 149 (а, в), 150 (а), 151 (а), 152 (а, в), 153 (а, в).

Преобразования можно выполнять как по действиям, так и «цепочкой». Выбор способа зависит от особенностей дробных выражений, а также от личного желания учащихся.

Например, выражение из задания № 148 (а) удобно преобразовывать «цепочкой»:

$$\begin{aligned} \left( \frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} \right) : \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) &= \left( \frac{x^2}{xy^2} - \frac{y^2}{xy^2} \right) : \left( \frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} \right) = \\ &= \frac{x^2 - y^2}{xy^2} : \frac{x+y}{xy} = \frac{(x-y)(x+y) \cdot xy}{xy^2 \cdot (x+y)} = \frac{x-y}{y}. \end{aligned}$$

Выражение из задания № 150 (а) выполнять по действиям:

$$\left( \frac{2m+1}{2m-1} - \frac{2m-1}{2m+1} \right) : \frac{4m}{10m-5}.$$

$$\begin{aligned} 1) \frac{2m+1}{2m-1} - \frac{2m-1}{2m+1} &= \frac{(2m+1)^2 - (2m-1)^2}{(2m-1)(2m+1)} = \\ &= \frac{4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 + 4m - 1}{(2m-1)(2m+1)} = \frac{8m}{(2m-1)(2m+1)}; \end{aligned}$$



$$2) \frac{8m}{(2m-1)(2m+1)} : \frac{4m}{10m-5} = \frac{8m \cdot 5(2m-1)}{(2m-1)(2m+1) \cdot 4m} = \frac{10}{2m+1}.$$

**№ 153.**

$$a) (a^2 + 2a + 1) \cdot \left( \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a^2-1} - \frac{1}{a-1} \right).$$

$$1) \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a^2-1} - \frac{1}{a-1} = \frac{a-1+1-a-1}{a^2-1} = -\frac{1}{a^2-1} = \frac{1}{1-a^2};$$

$$2) (a^2 + 2a + 1) \cdot \frac{1}{1-a^2} = \frac{(a+1)^2}{(1-a)(1+a)} = \frac{a+1}{1-a}.$$

$$b) 1 - \left( \frac{2}{a-2} - \frac{2}{a+2} \right) \cdot \left( a - \frac{3a+2}{4} \right).$$

$$1) \frac{2}{a-2} - \frac{2}{a+2} = \frac{2(a+2) - 2(a-2)}{(a-2)(a+2)} = \frac{2a+4-2a+4}{(a-2)(a+2)} = \frac{8}{(a-2)(a+2)}.$$

$$2) a - \frac{3a+2}{4} = \frac{4a-3a-2}{4} = \frac{a-2}{4};$$

$$3) \frac{8}{(a-2)(a+2)} \cdot \frac{a-2}{4} = \frac{8 \cdot (a-2)}{(a-2)(a+2) \cdot 4} = \frac{2}{a+2};$$

$$4) 1 - \frac{2}{a+2} = \frac{a+2-2}{a+2} = \frac{a}{a+2}.$$

## V. Итоги урока.

– Как выполнить сложение или вычитание нескольких рациональных дробей?

– Сформулируйте правила умножения и деления рациональных дробей.

– Какими способами можно упрощать выражения, содержащие совместные действия с рациональными дробями?

**Домашнее задание:** № 148 (б, г), 149 (б), 151 (б), 152 (б), 153 (б, г).

## Урок 17

### СОВМЕСТНЫЕ ДЕЙСТВИЯ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ ДРОБЯМИ

**Цель:** продолжить формирование умения выполнять преобразования на совместные действия с дробями.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

Вычислите:

а)  $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}\right)^2$ ;      г)  $\left(\frac{7}{8} - \frac{5}{8}\right) \cdot 8$ ;      ж)  $\left(\frac{5}{9} - \frac{4}{9}\right) : \frac{1}{8}$ ;

б)  $\frac{5}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ ;      д)  $\frac{1}{4} : \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ ;      з)  $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{9}$ .

в)  $\frac{2}{5} : 2 + \frac{3}{5}$ ;      е)  $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} \cdot 2$ ;

#### III. Формирование умений и навыков.

• Выполнение заданий по учебнику: № 154 (а, в), 155, 159, 161.

#### № 155.

б)  $\left(\frac{x-2y}{x^2+2xy} - \frac{1}{x^2-4y^2} : \frac{x+2y}{(2y-x)^2}\right) \cdot \frac{(x+2y)^2}{4y^2}$ .

1)  $\frac{1}{x^2-4y^2} : \frac{x+2y}{(2y-x)^2} = \frac{1 \cdot (x-2y)^2}{(x-2y)(x+2y) \cdot (x+2y)} = \frac{x-2y}{(x+2y)^2}$ ;

2)  $\frac{x-2y}{x^2+2y} - \frac{x-2y}{(x+2y)^2} = \frac{x-2y}{x(x+2y)} - \frac{x-2y}{(x+2y)^2} =$   
 $= \frac{(x-2y)(x+2y) - x(x-2y)}{x(x+2y)^2} = \frac{x^2 - 4y^2 - x^2 + 2xy}{x(x+2y)^2} =$   
 $= \frac{2xy - 4y^2}{x(x+2y)^2}$ ;

3)  $\frac{2xy - 4y^2}{x(x+2y)^2} \cdot \frac{(x+2y)^2}{4y^2} = \frac{2y(x-2y) \cdot (x+2y)^2}{x(x+2y)^2 \cdot 4y^2} = \frac{x-2y}{2xy}$ .

**№ 161.**

$$б) \frac{y}{x-y} - \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} \cdot \left( \frac{x}{(x-y)^2} - \frac{y}{x^2 - y^2} \right).$$

$$1) \frac{x}{(x-y)^2} - \frac{y}{x^2 - y^2} = \frac{x}{(x-y)^2} - \frac{y}{(x-y)(x+y)} = \\ = \frac{x(x+y) - y(x-y)}{(x+y)(x-y)^2} = \frac{x^2 + xy - xy + y^2}{(x+y)(x-y)^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x+y)(x-y)^2};$$

$$2) \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{(x+y)(x-y)^2} = \frac{x(x-y)(x+y)(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)(x+y)(x-y)^2} = \frac{x}{x-y};$$

$$3) \frac{y}{x-y} - \frac{x}{x-y} = \frac{y-x}{x-y} = -1.$$

Таким образом, исходное выражение принимает значение  $-1$  при любых значениях переменных  $x$  и  $y$ .

• **Дополнительные задания** (для учащихся с высоким уровнем подготовки).

**№ 157.**

Сначала упростим данное выражение:

$$(0,5(a-1)^2 - 18) \left( \frac{a+5}{a-7} + \frac{a-7}{a+5} \right).$$

$$1) \frac{a+5}{a-7} + \frac{a-7}{a+5} = \frac{(a+5)^2 + (a-7)^2}{(a-7)(a+5)} = \\ = \frac{a^2 + 10a + 25 + a^2 - 14a + 49}{(a-7)(a+5)} = \frac{2a^2 - 4a + 74}{(a-7)(a+5)};$$

$$2) 0,5(a-1)^2 - 18 = 0,5(a^2 - 2a + 1) - 18 = 0,5a^2 - a + 0,5 - 18 = \\ = 0,5a^2 - a - 17,5;$$

$$3) \frac{2(a^2 - 2a + 37)}{(a-7)(a+5)} \cdot (0,5a^2 - a - 17,5) = \\ = \frac{(a^2 - 2a + 37)(a^2 - 2a - 35)}{a^2 - 2a - 35} = a^2 - 2a + 37.$$

Представим полученный многочлен в виде суммы квадрата двучлена и некоторого числа:

$$a^2 - 2a + 37 = a^2 - 2a + 1 - 1 + 37 = (a-1)^2 + 36.$$

Поскольку выражение  $(a - 1)^2$  неотрицательно при любом  $a$ , то выражение  $(a - 1)^2 + 36$  принимает наименьшее значение при  $a = 1$ , и это значение равно 36.

Ответ: 36.

### № 160.

$$а) \frac{1,2x^2 - xy}{0,36x^2 - 0,25y^2} = \frac{20x}{6x + 5y}.$$

Преобразуем выражение, стоящее в левой части равенства:

$$\begin{aligned} \frac{1,2x^2 - xy}{0,36x^2 - 0,25y^2} &= \frac{x(1,2x - y)}{(0,6x - 0,5y)(0,6x + 0,5y)} = \\ &= \frac{2x(1,2x - y)}{2(0,6x - 0,5y)(0,6x + 0,5y)} = \frac{2x(1,2x - y)}{(1,2x - y)(0,6x + 0,5y)} = \\ &= \frac{2x}{0,6x + 0,5y} = \frac{10 \cdot 2x}{10 \cdot (0,6x + 0,5y)} = \frac{20x}{6x + 5y}. \end{aligned}$$

Таким образом, эти выражения тождественно равны.

- Задания на карточках для сильных учащихся.

### Карточка 1

Упростите выражение:

$$\frac{a^3 - b^3}{2a + 2b} \cdot \left( \frac{a + b}{a - b} + \frac{a - b}{a + b} \right) : \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - b^2}.$$

Решение

$$\begin{aligned} 1) \frac{a + b}{a - b} + \frac{a - b}{a + b} &= \frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{(a - b)(a + b)} = \\ &= \frac{a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2}{(a - b)(a + b)} = \frac{2a^2 + 2b^2}{(a - b)(a + b)}; \\ 2) \frac{a^3 - b^3}{2a + 2b} \cdot \frac{2a^2 + 2b^2}{(a - b)(a + b)} &= \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2) \cdot 2(a^2 + b^2)}{2(a + b)(a - b)(a + b)} = \\ &= \frac{(a^2 + ab + b^2)(a^2 + b^2)}{(a + b)^2}; \end{aligned}$$

$$3) \frac{(a^2 + ab + b^2)(a^2 + b^2)}{(a+b)^2} : \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - b^2} =$$

$$= \frac{(a^2 + ab + b^2)(a^2 + b^2)(a-b)(a+b)}{(a+b)^2(a^2 + ab + b^2)} = \frac{(a^2 + b^2)(a-b)}{a+b}.$$

## Карточка 2

Упростите выражение:

$$\frac{1 - 2b^2 - 2ab}{b^2 - a^2} + \left( \frac{a^2 + ab + b^2}{a^3 + b^3} - \frac{b^3 - a^3}{a^2 - ab + b^2} \right) \cdot \frac{a^2 - ab + b^2}{a^3 - b^3}.$$

### Решение

Данное выражение лучше преобразовать «цепочкой», при этом рациональнее будет сначала раскрыть скобки:

$$\frac{1 - 2b^2 - 2ab}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 + ab + b^2}{a^3 + b^3} \cdot \frac{a^2 - ab + b^2}{a^3 - b^3} -$$

$$- \frac{b^3 - a^3}{a^2 - ab + b^2} \cdot \frac{a^2 - ab + b^2}{a^3 - b^3} = \frac{1 - 2b^2 - 2ab}{b^2 - a^2} +$$

$$+ \frac{(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab - b^2)}{(a+b)(a^2 - ab + b^2)(a-b)(a^2 + ab + b^2)} + 1 =$$

$$= \frac{1 - 2b^2 - 2ab}{(b-a)(b+a)} + \frac{1}{(a+b)(a-b)} + 1 = \frac{1 - 2b^2 - 2ab - 1 + b^2 - a^2}{(b-a)(b+a)} =$$

$$= \frac{-b^2 - 2ab - a^2}{(b-a)(b+a)} = -\frac{(b+a)^2}{(b-a)(b+a)} = -\frac{b+a}{b-a} = \frac{a+b}{a-b}.$$

## IV. Итоги урока.

– Как выполнить сложение или вычитание рациональных дробей? Сформулируйте правила умножения и деления рациональных дробей.

– Какими способами можно упрощать выражения, содержащие совместные действия с дробями?

**Домашнее задание:** № 154 (б, г), 156, 162; № 158, 160 (б) (дополнительно).

## Урок 18

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДРОБНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

**Цель:** формировать умение преобразовывать дроби, числитель и знаменатель которых являются дробными выражениями.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

Вычислите:

$$\text{а) } \frac{1}{\frac{2}{3}}; \quad \text{б) } \frac{2}{\frac{7}{5}}; \quad \text{в) } \frac{3}{\frac{1}{2}}; \quad \text{г) } \frac{5}{\frac{1}{3}}; \quad \text{д) } \frac{4}{\frac{2}{3}}; \quad \text{е) } \frac{1}{\frac{5}{2}}; \quad \text{ж) } \frac{1}{\frac{8}{3}}; \quad \text{з) } \frac{2}{\frac{3}{4}}.$$

#### III. Проверочная работа.

##### Вариант 1

Упростите выражение:

$$\text{а) } \frac{10-3m}{m+2} - \frac{6-5m}{m+2} + \frac{m}{m+2} \cdot \frac{m^2-4}{m};$$

$$\text{б) } \left( a - \frac{a^2+2}{a-1} \right) \cdot \frac{1-2a+a^2}{a+2}.$$

##### Вариант 2

Упростите выражение:

$$\text{а) } \frac{3x-4}{x+1} - \frac{2x-5}{x+1} + \frac{x}{x+1} : \frac{x}{x^2-1};$$

$$\text{б) } \left( a - \frac{a^2-3}{a-2} \right) : \frac{3-2a}{4-4a+a^2}.$$

#### IV. Объяснение нового материала.

Вы уже знакомы с аналогом изучаемых дробей – «многоэтажными» числовыми дробями и знаете несколько приёмов упрощения таких выражений. Сейчас рассмотрим пример 3 из учебника.

## V. Формирование умений и навыков.

• Выполнение заданий по учебнику: № 163 (а, в), 164, 168 (а), 166.

### № 166.

$$а) \frac{\frac{ab}{a+b} - a}{\frac{ab}{a+b} - b} = \frac{ab - a(a+b)}{ab - b(a+b)} = \frac{ab - a^2 - ab}{ab - ab - b^2} = \frac{a^2}{b^2};$$

$$б) \frac{\frac{a}{b} - \frac{a-b}{a+b}}{\frac{b}{a} + \frac{a-b}{a+b}} = \frac{\frac{a(a+b) - b(a-b)}{b(a+b)}}{\frac{b(a+b) + a(a-b)}{a(a+b)}} = \frac{\frac{a^2 + ab - ab - b^2}{b}}{\frac{ab + b^2 + a^2 - ab}{a}} = \frac{a(a^2 - b^2)}{b(a^2 + b^2)}.$$

• Дополнительное задание (для учащихся с высоким уровнем подготовки).

### № 169.

$$а) \frac{1}{3 - \frac{1}{x-2}}.$$

Чтобы это выражение имело смысл, необходимо потребовать от всех входящих в его запись знаменателей необращения в нуль, то есть:

$$1) x - 2 \neq 0,$$

$$x \neq 2;$$

$$2) 3 - \frac{1}{x-2} \neq 0$$

$$3(x-2) - 1 \neq 0,$$

$$3x - 6 - 1 \neq 0,$$

$$3x \neq 7,$$

$$x \neq \frac{7}{3}.$$

$$\text{Ответ: } x \neq 2, \quad x \neq 2\frac{1}{3}.$$

## VI. Итоги урока.

– Сформулируйте правила действий с дробными выражениями.

– Какими способами можно преобразовать дробь, числитель и знаменатель которой являются дробными выражениями?

**Домашнее задание:** № 163 (б, г), 165, 168 (б), 167 (дополнительно).

## Урок 19

### НАХОЖДЕНИЕ СРЕДНЕГО ГАРМОНИЧЕСКОГО РЯДА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

**Цели:** формировать умение отыскивать среднее гармоническое для ряда положительных чисел; продолжить формирование умения выполнять преобразования дробных выражений.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Устная работа.

1. Вычислите:

а)  $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$ ;

г)  $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} - 1,1$ ;

б)  $\frac{1}{5} : \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)$ ;

д)  $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot 2$ ;

в)  $\frac{7}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ ;

е)  $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$ .

2. Найдите среднее арифметическое чисел:

а) 7 и 10;

в) 0,5 и  $\frac{1}{4}$ ;

б) 3,5 и 13;

г)  $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}$ .

##### III. Объяснение нового материала.

Рассмотрим задачу на вычисление средней скорости, в которой данные будут числовыми.

**Задача.** Одну и ту же дистанцию лыжник прошёл сначала со скоростью 18 км/ч, а затем – со скоростью 20 км/ч. Какова была средняя скорость на всём пути?

Очень часто учащиеся допускают ошибку: находят среднюю скорость как среднее арифметическое данных скоростей. Так отыскивать среднюю скорость нельзя. Чтобы найти среднюю скорость, нужно разделить весь пройденный путь на общее вре-



мя движения на этом пути. Если обозначить длину дистанции как  $S$  км, то в первый раз лыжник потратил на её прохождение  $\frac{S}{18}$  ч, а во второй раз  $\frac{S}{20}$  ч. Получим:  $V_{cp} = \frac{2S}{\frac{S}{18} + \frac{S}{20}}$ .

Упростим полученное дробное выражение:

$$\frac{2S}{\frac{S}{18} + \frac{S}{20}} = \frac{2}{\frac{1}{18} + \frac{1}{20}} = \frac{2}{\frac{10}{180} + \frac{9}{180}} = \frac{2}{\frac{19}{180}} = \frac{360}{19} = 18\frac{18}{19}.$$

Таким образом, средняя скорость лыжника на всём пути была равна  $18\frac{18}{19}$  км/ч.

Рассмотрим пример 4 из учебника, в котором показан общий вид решения подобных задач. Объясните понятие среднего гармонического ряда положительных чисел.

#### IV. Формирование умений и навыков.

Все задания можно разбить на две группы:

1-я группа. Задачи на нахождение среднего гармонического ряда положительных чисел: № 170 (а, в), 171, 172, 173.

2-я группа. Задания на преобразование дробных выражений: № 247, 248 (а, в), 249 (б).

• Выполнение заданий по учебнику.

№ 247.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{3}{2}a^2 - 2ab + \frac{2}{3}b^2}{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{9}b^2} + \frac{6b}{\frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b} &= \frac{\frac{3}{2}a^2 - 2ab + \frac{2}{3}b^2}{\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b\right)} + \\ + \frac{6b}{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b\right)} &= \frac{\frac{9}{4}a^2 - 3ab + b^2 + 6b\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b\right)}{\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b\right)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{9}{4}a^2 - 3ab + b^2 + 3ab - 2b^2}{\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b\right)} = \frac{\frac{9}{4}a^2 - b^2}{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{9}b^2} = \frac{9\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{9}b^2\right)}{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{9}b^2} = 9.$$

Таким образом, исходное выражение не зависит от значений  $a$  и  $b$ .

### № 249.

б) Чтобы выражение  $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$  имело смысл, необходимо

выполнение трёх условий:

1)  $x \neq 0$ ;

2)  $1 - \frac{1}{x} \neq 0$ ;  $\frac{1}{x} \neq 1$ ;  $x \neq 1$ ;

3)  $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \neq 0$ ;  $\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \neq 1$ ;  $1 - \frac{1}{x} \neq 1$ ;  $\frac{1}{x} \neq 0$ .

Ответ:  $x \neq 0$ ;  $x \neq 1$ .

### V. Итоги урока.

– Сформулируйте правила действий с дробными выражениями. Как найти среднюю скорость движения на определённом участке пути?

– По какой формуле вычисляется среднее гармоническое ряда положительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ?

Домашнее задание: № 170 (б), 250, 251, 248 (б, г).

## Урок 20

### ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = \frac{k}{x}$

**Цели:** ввести понятие функции *обратная пропорциональность*; формировать умение строить график этой функции.

### Ход урока

#### I. Организационный момент.

## II. Устная работа.

Выразите из формулы величину  $x$ :

а)  $y = x \cdot z$ ;

г)  $3a = cx$ ;

б)  $a = b \cdot x$ ;

д)  $y = 2xz$ ;

в)  $t = 7x$ ;

е)  $p^2 = -4tx$ .

## III. Объяснение нового материала.

1. Введение функции *обратная пропорциональность* (рассмотрение реальных процессов и ситуаций).

**Пример 1.** Пешеходу надо пройти 12 км. Если он будет идти со скоростью  $V$  км/ч, то зависимость времени  $t$ , которое он затратит на весь путь, от скорости движения выражается формулой  $t = \frac{12}{V}$ .

**Пример 2.** Площадь прямоугольника равна  $60 \text{ см}^2$ , а одно из его измерений равно  $a$  см. Тогда второе измерение можно найти по формуле  $b = \frac{60}{a}$ .

**Пример 3.** Количество товара  $m$ , которое можно купить на одну и ту же сумму денег в 500 р., зависит от его стоимости  $P$  (в рублях). Эта зависимость выражается формулой  $m = \frac{500}{P}$ .

Полученные в примерах формулы выносятся на доску:

$$\boxed{t = \frac{12}{V}; \quad b = \frac{60}{a}; \quad m = \frac{500}{P}}$$

– Что общего имеют все данные формулы? Запишите полученные зависимости в общем виде:  $y = \frac{k}{x}$ .

Заметить, что в данной формуле величины находятся в *обратно пропорциональной зависимости*, поэтому функцию  $y = \frac{k}{x}$  называют *обратной пропорциональностью*.

На доску выносятся запись:

Функция, заданная формулой вида  $y = \frac{k}{x}$ , где  $k \neq 0$ , называется *обратной пропорциональностью*

Задание. Укажите, какие из функций являются обратной пропорциональностью.

- а)  $y = \frac{3}{x}$ ;      в)  $y = -\frac{7}{x}$ ;      д)  $y = \frac{x}{5}$ ;      ж)  $y = \frac{5}{x^2}$ ;  
б)  $y = 2x - 1$ ;      г)  $y = \frac{1}{4}x$ ;      е)  $y = -\frac{0,6}{x}$ ;      з)  $y = -\frac{1}{2x}$ .

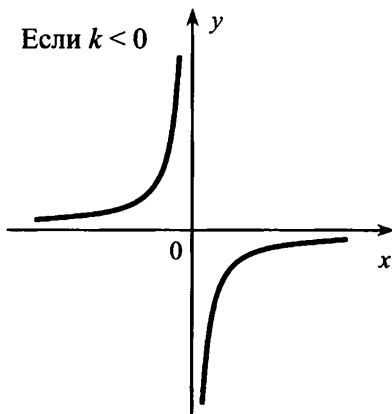
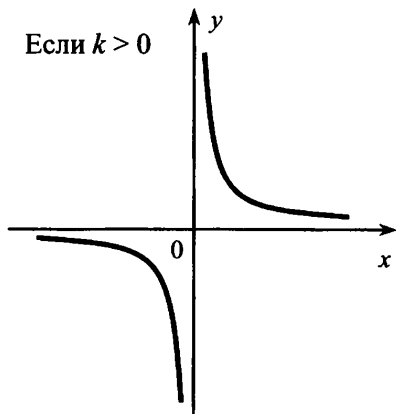
2. График функции  $y = \frac{k}{x}$ .

Построим график функции  $y = \frac{12}{x}$ . По этому графику опишем некоторые свойства функции. Затем построим график функции  $y = -\frac{12}{x}$  и сопоставим его с графиком функции  $y = \frac{12}{x}$ .

Сделаем вывод о расположении гиперболы в зависимости от коэффициента  $k$  (№ 192). Занесем в тетрадь следующую иллюстрацию:

Функция  $y = \frac{k}{x}$

График – гипербола

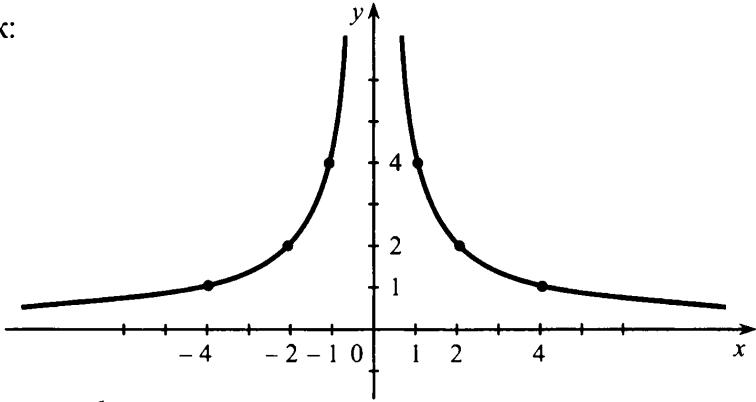


#### IV. Формирование умений и навыков.

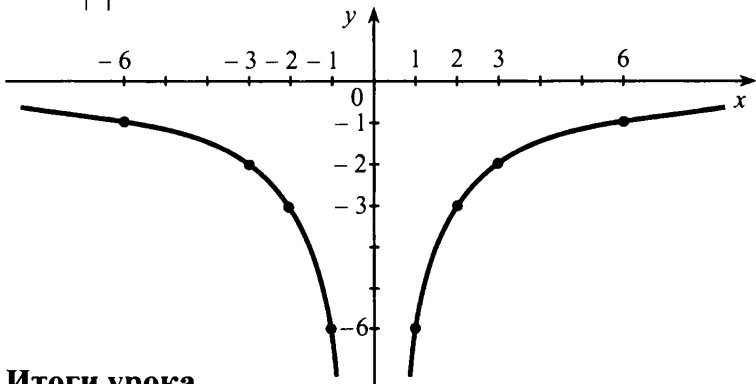
- Выполнение заданий: № 179, 182, 185, 181.
- Дополнительное задание. Графиком какой из функций  $y = \frac{x}{3}$ ,  $y = \frac{1}{3}x$ ,  $y = \frac{3}{x}$  является гипербола? Постройте эту гиперболу.

• Задание для сильных учащихся: № 257 (а, д).

- а) Для построения графика функции  $y = \frac{4}{|x|}$  необходимо рассмотреть два случая. При  $x > 0$  данная функция совпадает с функцией  $y = \frac{4}{x}$ , а при  $x < 0$  – с функцией  $y = -\frac{4}{x}$ . Поэтому получим график:



- д)  $y = -\frac{6}{|x|}$ . Рассуждая аналогично, получим график:



#### V. Итоги урока.

– Функция какого вида называется обратной пропорциональностью?

– Что является графиком функции  $y = \frac{k}{x}$ ?

– В каких координатных четвертях расположен график функции  $y = \frac{k}{x}$  в зависимости от  $k$ ?

– Какова область определения функции  $y = \frac{k}{x}$ ?

**Домашнее задание:** № 180, 184, 193, 257 (б, г) (дополнительно).

## Урок 21

### ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$ И ЕЁ ГРАФИК В РЕШЕНИИ РАЗЛИЧНЫХ ЗАДАЧ

**Цель:** продолжить формирование умения использовать понятие, свойства и график функции  $y = \frac{k}{x}$  при решении различных задач.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа. Даны функции:

$$y = \frac{2}{x}; \quad y = -\frac{7}{x}; \quad y = \frac{0,3}{x}; \quad y = -\frac{1}{x^3};$$

$$y = \frac{1}{5}x; \quad y = \frac{3}{x^2}; \quad y = -\frac{x}{8}; \quad y = -\frac{0,9}{x}.$$

Какие из них являются обратной пропорциональностью?  
Среди таких функций найдите те, которые:

- расположены в I и III координатных четвертях;
- расположены во II и IV координатных четвертях;
- положительны на промежутке  $(0; +\infty)$ ;
- отрицательны на промежутке  $(0; +\infty)$ .

#### III. Проверочная работа.

##### Вариант 1

Дана функция  $y = -\frac{4}{x}$ .

1) Найдите значение  $y$ , соответствующее значению  $x$ , равно-  
му 2; 8; -1; -7.

б) Найдите значение  $x$ , которому соответствует значение  $y$ ,  
равное 2; -1; -8.

в) Постройте график этой функции.

г) Укажите, при каких значениях  $x$  функция принимает по-  
ложительные значения.

### В а р и а н т 2

Дана функция  $y = \frac{6}{x}$ .

а) Найдите значение  $y$ , соответствующее значению  $x$ , равно-  
му 2; 8; -3; -9.

б) Найдите значение  $x$ , которому соответствует значение  $y$ ,  
равное -3; 1; 12.

в) Постройте график этой функции.

г) Укажите, при каких значениях  $x$  функция принимает по-  
ложительные значения?

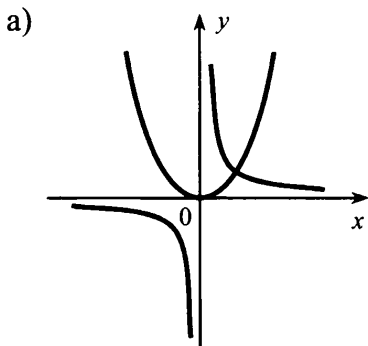
### IV. Формирование умений и навыков.

• № 183, 190 (в), 191, 186 (а), 187.

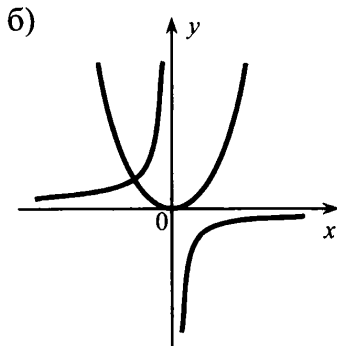
• В классе с высоким уровнем подготовки можно выполнить  
несколько дополнительных заданий, связанных с использовани-  
ем графика функций  $y = \frac{k}{x}$  при решении уравнений.

#### № 188.

Проиллюстрируйте каждый из случаев.

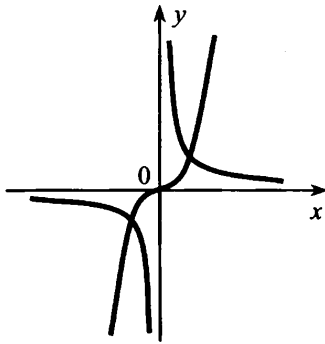


одно решение



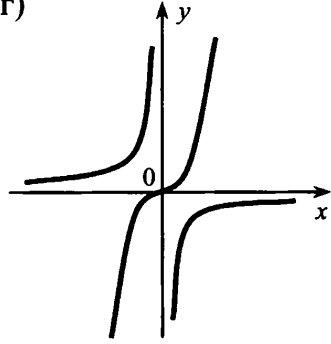
одно решение

в)



два решения

г)

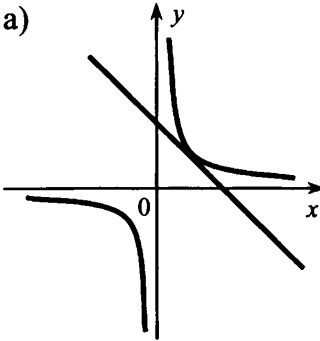


нет решений

№ 261.

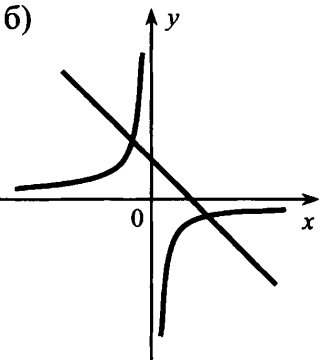
Если ответ на вопрос будет положительным, то необходимо показать его на рисунке.

а)



Графики функций  $y = \frac{k}{x}$  и  $y = kx + b$  могут пересекаться только в одной точке. В этом случае прямая касается одной из ветвей гиперболы.

б)



Прямая может пересекать гиперболу в двух точках.

в) Прямая не может пересекать гиперболу в трёх точках. Это утверждение можно доказать, решая соответствующее уравнение:

$$\frac{k}{x} = ax + b.$$



Преобразовав это уравнение, получим квадратное уравнение  $ax^2 + bx - k = 0$ , которое не может иметь более двух корней.

Значит, графики функций  $y = \frac{k}{x}$  и  $y = kx + b$  не могут пересекаться в трёх точках.

Найдите координаты какой-нибудь точки, принадлежащей графику функции  $y = \frac{5}{x}$  и находящейся от оси  $x$  на расстоянии, меньшем, чем  $0,1$ .

### Решение

Сначала необходимо изобразить схематически график функции  $y = \frac{5}{x}$  и прямые  $y = 0,1$  и  $y = -0,1$ , поскольку точки, находящиеся от оси  $x$  на расстоянии  $0,1$ , лежат на этих прямых.

Прямые  $y = 0,1$  и  $y = -0,1$  пересекут ветви гиперболы в точках  $A$  и  $B$ , которые находятся от оси  $x$  на расстоянии, равном  $0,1$ . Очевидно, что все точки на гиперболе, расположенные правее точки  $A$ , будут ближе к оси  $x$ , значит, находятся на расстоянии, меньшем  $0,1$ . То же самое можно сказать обо всех точках гиперболы, находящихся левее точки  $B$ .

Найдем абсциссу точки  $A$ :  $0,1 = \frac{5}{x}$ , откуда  $x = 50$ .

Таким образом, для нахождения искомым точек можно брать те точки, абсциссы которых больше  $50$ . Аналогично получаем, что для левой ветви гиперболы такими точками будут те, абсциссы которых меньше  $-50$ .

### V. Итоги урока.

– Как называется функция  $y = \frac{k}{x}$ ? Что является ее графиком?

– В каких четвертях расположен график функции  $y = \frac{k}{x}$ ?

– Какова область определения функции  $y = \frac{k}{x}$ ?

**Домашнее задание:** № 186 (б), 189, 190 (б), 262 (дополнительно).

## Урок 22

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 2

#### Вариант 1

1. Представьте в виде дроби:

а)  $\frac{42x^5}{y^4} \cdot \frac{y^2}{14x^5}$ ;

б)  $\frac{63a^3b}{c} : (18a^2b)$ ;

в)  $\frac{4a^2-1}{a^2-9} : \frac{6a+3}{a+3}$ ;

г)  $\frac{p-q}{p} \cdot \left( \frac{p}{p-q} + \frac{p}{q} \right)$ .

2. Постройте график функции  $y = \frac{6}{x}$ . Какова область определения функции? При каких значениях  $x$  функция принимает отрицательные значения?

3. Докажите, что при всех значениях  $b \neq \pm 1$  значение выражения  $(b-1)^2 \cdot \left( \frac{1}{b^2-2b+1} + \frac{1}{b^2-1} \right) + \frac{2}{b+1}$  не зависит от  $b$ .

4. При каких значениях  $a$  имеет смысл выражение  $\frac{15a}{3 + \frac{21}{4a-6}}$  ?

#### Вариант 2

1. Представьте в виде дроби:

а)  $\frac{2a}{51x^6y} \cdot 17x^7y$ ;

б)  $\frac{24b^2c}{3a^6} : \frac{16bc}{a^5}$ ;

в)  $\frac{5x+10}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-4}$ ;

г)  $\frac{y+c}{c} \cdot \left( \frac{c}{y} - \frac{c}{y+c} \right)$ .

2. Постройте график функции  $y = -\frac{6}{x}$ . Какова область определения функции? При каких значениях  $x$  функция принимает положительные значения?

3. Докажите, что при всех значениях  $x \neq \pm 2$  значение выражения  $\frac{x}{x+2} - \frac{(x-2)^2}{2} \cdot \left( \frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x^2-4x+4} \right)$  не зависит от  $x$ .

4. При каких значениях  $b$  имеет смысл выражение  $\frac{5b}{2 - \frac{4}{3-2b}}$ ?

### Вариант 3

1. Представьте в виде дроби:

а)  $\frac{28b^6}{c^3} \cdot \frac{c^5}{84b^6}$ ;

б)  $30x^2y : \frac{72xy}{z}$ ;

в)  $\frac{3x+6}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{x^2-4}$ ;

г)  $\frac{2a-b}{a} \cdot \left( \frac{a}{2a-b} + \frac{a}{b} \right)$ .

2. Постройте график функции  $y = \frac{4}{x}$ . Какова область определения функции? При каких значениях  $x$  функция принимает положительные значения?

3. Докажите, что при всех значениях  $y \neq \pm 3$  значение выражения  $\frac{2y}{y+3} + (y-3)^2 \cdot \left( \frac{2}{9-6y+y^2} + \frac{1}{9-y^2} \right)$  не зависит от  $y$ .

4. При каких значениях  $x$  имеет смысл выражение  $\frac{3x}{1 - \frac{6}{10-5x}}$ ?

### Вариант 4

1. Представьте в виде дроби:

а)  $\frac{14p^4}{q^6} \cdot \frac{q^5}{56p^4}$ ;

б)  $45a^3b \cdot \frac{c^2}{30a^4b}$ ;

в)  $\frac{3a-9}{a+2} : \frac{a^2-9}{a^2-4}$ ;

г)  $\frac{3x+y}{y} \cdot \left( \frac{y}{x} - \frac{3y}{3x+y} \right)$ .

2. Постройте график функции  $y = -\frac{4}{x}$ . Какова область определения функции? При каких значениях  $x$  функция принимает отрицательные значения?

3. Докажите, что при всех значениях  $a \neq \pm 5$  значение выражения  $\left( \frac{3}{25-a^2} + \frac{1}{a^2-10a+25} \right) \cdot \frac{(5-a)^2}{2} + \frac{3a}{a+5}$  не зависит от  $a$ .

4. При каких значениях  $y$  имеет смысл выражение  $\frac{5y}{2 - \frac{7}{6+2y}}$ ?

### РЕШЕНИЕ ВАРИАНТОВ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

#### Вариант 1

1. а)  $\frac{42x^5}{y^4} \cdot \frac{y^2}{14x^5} = \frac{42x^5 y^2}{14x^5 y^4} = \frac{3}{y^2}$ ;

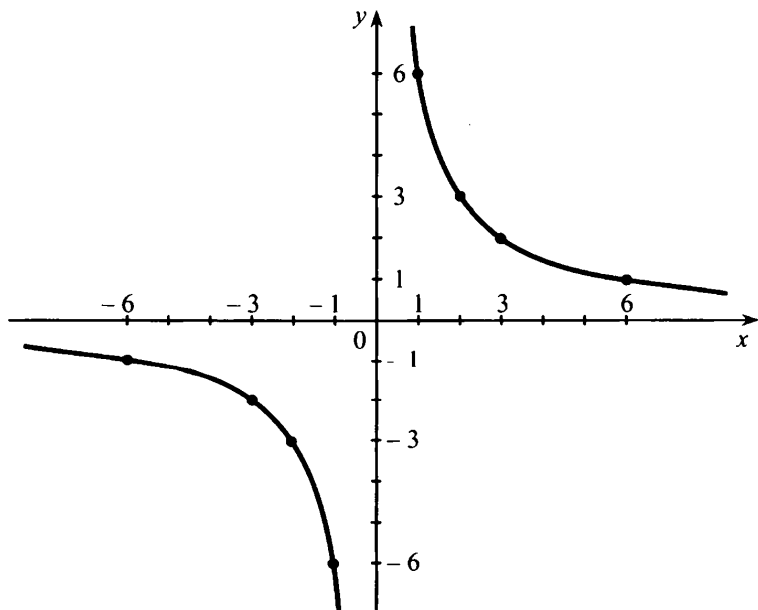
б)  $\frac{63a^3b}{c} : (18a^2b) = \frac{63a^3b}{18a^2bc} = \frac{7a}{2c}$ ;

в)  $\frac{4a^2-1}{a^2-9} : \frac{6a+3}{a+3} = \frac{(2a-1)(2a+1) \cdot (a+3)}{(a-3)(a+3) \cdot 3(2a+1)} = \frac{2a-1}{3a-9}$ ;

г)  $\frac{p-q}{p} \cdot \left( \frac{p}{p-q} + \frac{p}{q} \right) = \frac{p-q}{p} \cdot \frac{p}{p-q} + \frac{p-q}{p} \cdot \frac{p}{q} =$   
 $= 1 + \frac{p-q}{q} = \frac{q+p-q}{q} = \frac{p}{q}$ .

2.  $y = \frac{6}{x}$ .

|     |   |   |   |   |    |    |    |    |
|-----|---|---|---|---|----|----|----|----|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 6 | -1 | -2 | -3 | -6 |
| $y$ | 6 | 3 | 2 | 1 | -6 | -3 | -2 | -1 |



Область определения функции:  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

Функция принимает отрицательные значения при  $x \in (-\infty; 0)$ .

3. Упростим данное выражение:

$$(b-1)^2 \cdot \left( \frac{1}{b^2-2b+1} + \frac{1}{b^2-1} \right) + \frac{2}{b+1}.$$

$$1) \frac{1}{b^2-2b+1} + \frac{1}{b^2-1} = \frac{1}{(b-1)^2} + \frac{1}{(b-1)(b+1)} = \\ = \frac{b+1+b-1}{(b-1)^2(b+1)} = \frac{2b}{(b-1)^2(b+1)};$$

$$2) (b-1)^2 \cdot \frac{2b}{(b-1)^2(b+1)} = \frac{(b-1)^2 \cdot 2b}{(b-1)^2 \cdot (b+1)} = \frac{2b}{b+1};$$

$$3) \frac{2b}{b+1} + \frac{2}{b+1} = \frac{2b+2}{b+1} = \frac{2(b+1)}{b+1} = 2.$$

Таким образом, при любом значении  $b$  данное выражение равно 2, то есть не зависит от  $b$ .

4. Чтобы выражение  $\frac{15a}{3 + \frac{21}{4a-6}}$  имело смысл, должны вы-

полняться два условия:

$$1) 4a - 6 \neq 0$$

$$4a \neq 6$$

$$a \neq 1,5$$

$$2) 3 + \frac{21}{4a-6} \neq 0$$

$$12a - 18 + 21 \neq 0$$

$$12a \neq -3$$

$$a \neq -\frac{1}{4}$$

Ответ:  $a \neq 1,5; a \neq -\frac{1}{4}$ .

### Вариант 2

$$1. a) \frac{2a}{51x^6y} \cdot 17x^7y = \frac{2 \cdot 17ax^7y}{51x^6y} = \frac{2ax}{3};$$

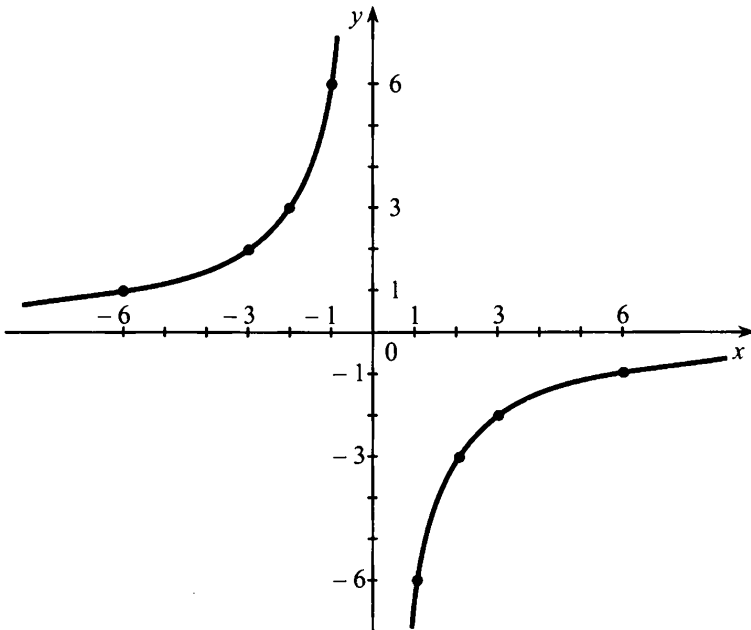
$$б) \frac{24b^2c}{3a^6} : \frac{16bc}{a^5} = \frac{24b^2c \cdot a^5}{3a^6 \cdot 16bc} = \frac{b}{2a};$$

$$в) \frac{5x+10}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-4} = \frac{5(x+2)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{5x+10}{x-2};$$

$$г) \frac{y+c}{c} \cdot \left( \frac{c}{y} - \frac{c}{y+c} \right) = \frac{y+c}{c} \cdot \frac{c}{y} - \frac{y+c}{c} \cdot \frac{c}{y+c} = \frac{y+c}{c} - 1 = \frac{y+c-y}{c} = \frac{c}{c} = 1.$$

$$2. y = -\frac{6}{x}.$$

|   |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| x | 1  | 2  | 3  | 6  | -1 | -2 | -3 | -6 |
| y | -6 | -3 | -2 | -1 | 6  | 3  | 2  | 1  |



Область определения функции:  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

Функция принимает положительные значения при  $x \in (-\infty; 0)$ .

3. Упростим данное выражение:

$$\frac{x}{x+2} - \frac{(x-2)^2}{2} \cdot \left( \frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x^2-4x+4} \right).$$

$$1) \frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x^2-4x+4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} + \frac{1}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{x-2+x+2}{(x+2)(x-2)^2} = \frac{2x}{(x+2)(x-2)^2};$$

$$2) \frac{(x-2)^2}{2} \cdot \frac{2x}{(x+2)(x-2)^2} = \frac{2x \cdot (x-2)^2}{2 \cdot (x+2)(x-2)^2} = \frac{x}{x+2};$$

$$3) \frac{x}{x+2} - \frac{x}{x+2} = 0.$$

Таким образом, при любом значении  $x$  данное выражение равно нулю, то есть не зависит от  $x$ .

4. Чтобы выражение  $\frac{5b}{2 - \frac{4}{3-2b}}$  имело смысл, должны вы-

полняться два условия:

$$1) 3 - 2b \neq 0$$

$$2b \neq 3$$

$$b \neq 1,5$$

$$2) 2 - \frac{4}{3-2b} \neq 0$$

$$6 - 4b - 4 \neq 0$$

$$4b \neq 2$$

$$b \neq 0,5$$

Ответ:  $b \neq 0,5; b \neq 1,5$ .

### Вариант 3

$$1. \text{ а) } \frac{28b^6}{c^3} \cdot \frac{c^5}{84b^6} = \frac{28b^6 c^5}{84b^6 c^3} = \frac{c^2}{3};$$

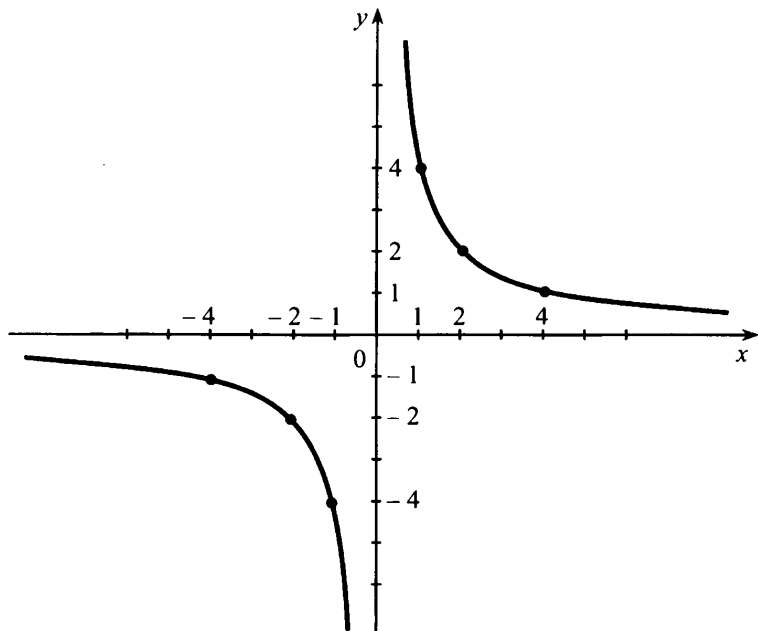
$$\text{ б) } 30x^2y : \frac{72xy}{z} = \frac{30x^2y \cdot x}{72xy} = \frac{5xz}{12};$$

$$\text{ в) } \frac{3x+6}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{x^2-4} = \frac{3(x+2) \cdot (x-3)(x+3)}{(x+3) \cdot (x-2)(x+2)} = \frac{3x-9}{x-2};$$

$$\begin{aligned} \text{ г) } \frac{2a-b}{a} \cdot \left( \frac{a}{2a-b} + \frac{a}{b} \right) &= \frac{2a-b}{a} \cdot \frac{a}{2a-b} + \frac{2a-b}{a} \cdot \frac{a}{b} = \\ &= 1 + \frac{2a-b}{b} = \frac{b+2a-b}{b} = \frac{2a}{b}. \end{aligned}$$

$$2. y = \frac{4}{x}.$$

|   |   |   |   |    |    |    |
|---|---|---|---|----|----|----|
| x | 1 | 2 | 4 | -1 | -2 | -4 |
| y | 4 | 2 | 1 | -4 | -2 | -1 |



Область определения функции:  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

Функция принимает положительные значения при  $x \in (0; +\infty)$ .

3. Упростим выражение:

$$\frac{2y}{y+3} + (y-3)^2 \cdot \left( \frac{2}{9-6y+y^2} + \frac{1}{9-y^2} \right).$$

$$1) \frac{2}{9-6y+y^2} + \frac{1}{9-y^2} = \frac{2}{(3-y)^2} + \frac{1}{(3-y)(3+y)} =$$

$$= \frac{6+2y+3-y}{(3-y)^2(3+y)} = \frac{y+9}{(3-y)^2(3+y)};$$

$$2) (y-3)^2 \cdot \frac{y+9}{(3-y)^2(3+y)} = \frac{(y-3)^2 \cdot (y+9)}{(3-y)^2(3+y)} = \frac{y+9}{y+3};$$

$$3) \frac{2y}{y+3} + \frac{y+9}{y+3} = \frac{2y+y+9}{y+3} = \frac{3y+9}{y+3} = \frac{3(y+3)}{y+3} = 3.$$



Таким образом, при любом значении  $y$  данное выражение равно 3, то есть не зависит от  $y$ .

4. Чтобы выражение  $\frac{3x}{1 - \frac{6}{10 - 5x}}$  имело смысл, должны вы-

полняться два условия:

$$1) 10 - 5x \neq 0$$

$$5x \neq 10$$

$$x \neq 2$$

$$2) 1 - \frac{6}{10 - 5x} \neq 0$$

$$10 - 5x - 6 \neq 0$$

$$5x \neq 4$$

$$x \neq \frac{4}{5}$$

Ответ:  $x \neq 2$ ;  $x \neq \frac{4}{5}$ .

#### Вариант 4

$$1. \text{ а) } \frac{14p^4}{q^6} \cdot \frac{q^5}{56p^4} = \frac{14p^4q^5}{56p^4q^6} = \frac{1}{4q};$$

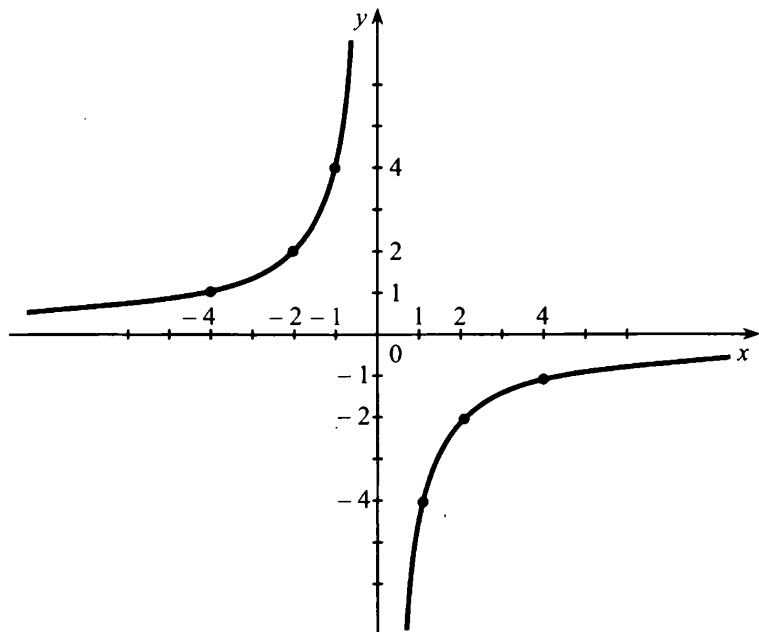
$$\text{б) } 45a^3b \cdot \frac{c^2}{30a^4b} = \frac{45a^3b \cdot c^2}{30a^4b} = \frac{3c^2}{2a};$$

$$\text{в) } \frac{3a-9}{a+2} : \frac{a^2-9}{a^2-4} = \frac{3(a-3) \cdot (a-2)(a+2)}{(a+2) \cdot (a-3)(a+3)} = \frac{3a-6}{a+3};$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \frac{3x+y}{y} \cdot \left( \frac{y}{x} - \frac{3y}{3x+y} \right) &= \frac{3x+y}{y} \cdot \frac{y}{x} - \frac{3x+y}{y} \cdot \frac{3y}{3x+y} = \\ &= \frac{3x+y}{x} - 3 = \frac{3x+y-3x}{x} = \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

$$2. y = -\frac{4}{x}.$$

|   |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|
| x | 1  | 2  | 4  | -1 | -2 | -4 |
| y | -4 | -2 | -1 | 4  | 2  | 1  |



Область определения функции:  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

Функция принимает отрицательные значения при  $x \in (0; +\infty)$ .

3. Упростим данное выражение:

$$\left( \frac{3}{25-a^2} + \frac{1}{a^2-10a+25} \right) \cdot \frac{(5-a)^2}{2} + \frac{3a}{a+5}.$$

$$1) \frac{3}{25-a^2} + \frac{1}{a^2-10a+25} = \frac{3}{(5-a)(5+a)} + \frac{1}{(a-5)^2} =$$

$$= \frac{15-3a+5+a}{(5-a)^2(5+a)} = \frac{20-2a}{(5-a)^2(5+a)};$$

$$2) \frac{20-2a}{(5-a)^2(5+a)} \cdot \frac{(5-a)^2}{2} = \frac{10-a}{5+a};$$

$$3) \frac{10-a}{5+a} + \frac{3a}{a+5} = \frac{10+2a}{a+5} = \frac{2(5+a)}{a+5} = 2.$$

Таким образом, при любом значении  $a$  данное выражение равно 2, то есть не зависит от  $a$ .

4. Чтобы выражение  $\frac{5y}{2 - \frac{7}{6+2y}}$  имело смысл, должны вы-

полняться два условия:

$$1) 6 + 2y \neq 0$$

$$2y \neq -6$$

$$y \neq -3$$

$$2) 2 - \frac{7}{6+2y} \neq 0$$

$$12 + 4y - 7 \neq 0$$

$$4y \neq -5$$

$$y \neq -1\frac{1}{4}$$

Ответ:  $y \neq -3$ ;  $y \neq -1\frac{1}{4}$ .

## Урок 23

### ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДРОБИ В ВИДЕ СУММЫ ДРОБЕЙ

**Цели:** изучить метод неопределённых коэффициентов; формировать умение представлять рациональную дробь в виде суммы дробей.

#### Ход урока

##### I. Изучение нового материала.

Существуют задачи, в которых нужно уметь выполнять действие, обратное сложению дробей: представлять рациональную дробь в виде суммы дробей.

Разберем три основных приёма, позволяющих совершить данное действие.

1-й приём. Использование элементарных преобразований

$$\frac{2x+3}{x-1} = \frac{2x-2x+2+3}{x-1} = \frac{2(x-1)+5}{x-1} = 2 + \frac{5}{x-1}.$$

2-й приём. Деление уголком числителя на знаменатель (пример 3 из учебника).

3-й приём. Метод неопределённых коэффициентов (пример 1 из учебника).

## II. Формирование умений и навыков.

1. № 197, 198, 199 – использование метода неопределённых коэффициентов.

2. № 200, 201, 203 – выделение целой части из дроби путём деления числителя на знаменатель.

3. № 202, 204 – выделение целой части из дроби с помощью элементарных преобразований.

4. № 205, 206, 207.

• Выполнение заданий.

### № 205.

Известно, что  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{7}$ . Необходимо найти все пары натуральных чисел, удовлетворяющих этому уравнению.

Выразим из этого уравнения переменную  $a$  через  $b$ :

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{7} - \frac{1}{b} = \frac{b-7}{7b};$$

$$a = \frac{7b}{b-7} = \frac{7b-49+49}{b-7} = \frac{7(b-7)+49}{b-7} = 7 + \frac{49}{b-7}.$$

Значение дроби  $\frac{49}{b-7}$  является натуральным числом в трёх случаях:

|                  |                   |                    |
|------------------|-------------------|--------------------|
| $b-7=1$<br>$b=8$ | $b-7=7$<br>$b=14$ | $b-7=49$<br>$b=56$ |
|------------------|-------------------|--------------------|

Ответ: (56; 8), (14; 14), (8; 56).

### № 206.

Известно, что  $\frac{x-y}{y} = 2$ . Преобразуем выражение, стоящее в левой части равенства:  $\frac{x}{y} - \frac{y}{y} = 2$ ;  $\frac{x}{y} - 1 = 2$ ;  $\frac{x}{y} = 3$ .

Таким образом, теперь нам известно значение выражения  $\frac{x}{y}$ .

Выделим целую часть из данной в условии дроби.

$$\frac{3x^2 - xy + 6y^2}{y^2} = \frac{3x^2}{y^2} - \frac{xy}{y^2} + \frac{6y^2}{y^2} = 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + 6. \text{ Подставляя}$$

в это выражение значение  $\frac{x}{y} = 3$ , получим:  $3 \cdot 3^2 - 3 + 6 = 30$ .

Ответ: 30.

# Глава II. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

## Урок 24

### РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

**Цели:** изучить множество рациональных чисел; формировать умение сравнивать рациональные числа и представлять их в виде бесконечных десятичных дробей.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Устная работа.

1. Сравните числа:

а)  $0,07$  и  $0,123$ ;

г)  $-2\frac{2}{3}$  и  $-2,1$ ;

б)  $1\frac{1}{4}$  и  $1,02$ ;

д)  $0,913$  и  $0,91$ ;

в)  $-3,72$  и  $-3,6$ ;

е)  $6,7$  и  $6\frac{1}{7}$ .

2. Переведите обыкновенную дробь в десятичную:

а)  $\frac{1}{2}$ ;

б)  $\frac{2}{5}$ ;

в)  $-\frac{4}{5}$ ;

г)  $\frac{1}{4}$ ;

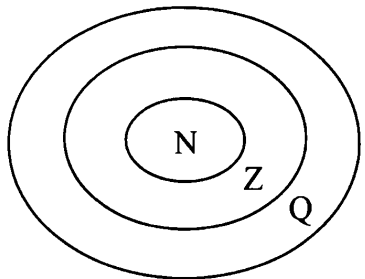
д)  $-\frac{3}{4}$ ;

е)  $\frac{7}{20}$ .

##### III. Объяснение нового материала.

1. Введение множества рациональных чисел.

Рассмотрим, как происходит расширение числовых множеств от натуральных до рациональных чисел. Для наглядности на доске изобразим вложение одних множеств в другие.



**Задание.** Определить, к какому множеству принадлежит каждое из чисел:

$7$ ;  $-5$ ;  $\frac{2}{3}$ ;  $-6,1$ ;  $-100$ ;  $-1\frac{7}{12}$ .

2. Представление рациональных чисел в виде обыкновенных дробей.

Любое рациональное число может быть представлено в виде дроби  $\frac{m}{n}$  ( $m \in Z, n \in N$ ) различными способами.

3. Представление рациональных чисел в виде десятичных дробей.

Показать, как с помощью деления уголком любое рациональное число может быть представлено в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

#### **IV. Формирование умений и навыков.**

• Выполнение заданий по учебнику: № 263, 264, 265, 267 (а, в, д, ж, и), 268 (а, в, д, ж), 269, 271.

#### **V. Итоги урока.**

– Принадлежит ли число  $-2$  множеству натуральных чисел? целых чисел? рациональных чисел?

– Какие числа составляют множество рациональных чисел?

– Сколькими способами можно представить рациональное число в виде обыкновенной дроби?

– Как представить рациональное число в виде десятичной дроби?

– Какая десятичная дробь может представлять рациональное число?

**Домашнее задание:** № 266, 267 (б, г, е, з, к), 268 (б, г, е, з), 270.

## **Урок 25**

### **МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ**

**Цели:** изучить множества иррациональных и действительных чисел; формировать умение различать эти множества чисел и сравнивать действительные числа.

#### **Ход урока**

##### **I. Организационный момент.**

## II. Устная работа.

Определите, к какому множеству принадлежит каждое из чисел:

$$-7; 19; \frac{3}{8}; -5,7; 235; -90; -1\frac{4}{11}.$$

## III. Объяснение нового материала.

1. Измерение длин отрезков на координатной прямой.

2. Постановка проблемной задачи: как измерить диагональ квадрата со стороной 1.

Обратимся к истории этого вопроса.

Математики Древней Греции более двадцати веков тому назад пришли к выводу, что нет ни целого, ни дробного числа, выражающего диагональ квадрата со стороной 1. Это вызвало кризис в математической науке: диагональ у квадрата есть, а длины у неё нет!

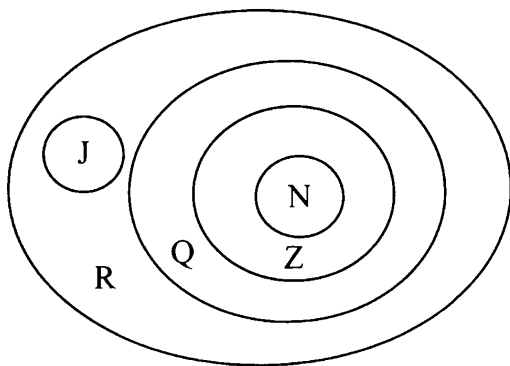
Математики нашли выход из этой ситуации: раз имеющегося запаса чисел – целых и дробных – не хватает для выражения длин отрезков, значит, нужны какие-то новые числа. Так появились иррациональные числа.

3. Введение множества действительных чисел.

– Что вам известно о различных множествах чисел?

На доску выносится рисунок:

4. Сравнение иррациональных чисел с помощью различных примеров.



## IV. Формирование умений и навыков.

Все задания можно разбить на две группы:

1-я группа. Задания на определение принадлежности чисел различным числовым множествам: № 276, 277, 279.

*Пример выполнения задания.*

Даны числа:

$$9; 0; -\frac{1}{2}; -6(3); 7,020020002\dots; 1,24(53); 345; \pi; -7\frac{3}{8}.$$

- Разделите их на две группы: рациональные и иррациональные.
- Заполните таблицу:

| Натуральные числа | Целые числа | Рациональные числа | Иррациональные числа |
|-------------------|-------------|--------------------|----------------------|
|                   |             |                    |                      |

2-я группа. Задания на сравнения действительных чисел:  
№ 280, 281 (а, в, д), 285, 286.

### V. Итоги урока.

- Какие числа называются рациональными, иррациональными?
- Из каких чисел состоит множество действительных чисел?

Домашнее задание: № 278, 281 (б, г, е), 282.

## Урок 26

### ДЕЙСТВИЯ НАД ИРРАЦИОНАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

**Цель:** формировать умение различать рациональные и иррациональные числа и осуществлять действия над ними.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

Вычислите:

а)  $0,15 + 1,37$ ;

д)  $-3,8 - 5,7$ ;

б)  $1,27 + 3,3$ ;

е)  $2,9 - 6,3$ ;

в)  $6,42 - 3,2$ ;

ж)  $1,7 - 0,95$ ;

г)  $-8 + 4,7$ ;

з)  $-1,25 - 5,8$ .

#### III. Тест с последующей проверкой.

«+» – согласен с утверждением;

«-» – не согласен с утверждением.

1) Всякое целое число является натуральным.

2) Всякое натуральное число является рациональным.

3) Число  $-7$  является рациональным.

4) Сумма двух натуральных чисел всегда является натуральным числом.



- 5) Разность двух натуральных чисел всегда является натуральным числом.
- 6) Произведение двух целых чисел всегда является целым числом.
- 7) Частное двух целых чисел всегда является целым числом.
- 8) Сумма двух рациональных чисел всегда является рациональным числом.
- 9) Частное двух рациональных чисел всегда является рациональным числом.
- 10) Всякое иррациональное число является действительным.
- 11) Действительное число не может быть натуральным.
- 12) Число  $2,7(5)$  является иррациональным.
- 13) Число  $\pi$  является действительным.
- 14) Число  $3,1(4)$  меньше числа  $\pi$ .
- 15) Число  $-10$  принадлежит одновременно множеству целых, рациональных и действительных чисел.

**К л ю ч :**

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| - | + | + | + | - | + | - | + | + | +  | -  | -  | +  | -  | +  |

#### **IV. Объяснение нового материала.**

Рассмотрим примеры из учебника, показывающие, как осуществлять арифметические действия над иррациональными числами.

#### **V. Формирование умений и навыков.**

- Выполнение заданий № 283, 284 (а), 287, 288, 290.
- Дополнительные вопросы и задания.

В классе с высоким уровнем подготовки можно дополнительно разобрать вопрос о том, каким числом представляется сумма или разность рациональных и иррациональных чисел. Для этого нужно решить ряд задач.

#### **№ 292.**

Сложим данные иррациональные числа в столбик:

$$\begin{array}{r}
 1,323223222\dots \\
 + \\
 2,313113111\dots \\
 \hline
 3,636336333\dots
 \end{array}$$

Получим число, дробная часть которого представлена группой цифр, состоящих из одной, двух, трёх и т. д. троек, разде-

лённых шестёрками. Очевидно, что данное число является иррациональным.

– Может ли сумма двух иррациональных чисел быть числом рациональным?

### Решение

В предыдущей задаче мы выполнили сложение двух иррациональных чисел и получили в сумме иррациональное число. Но это не означает, что сумма любых двух иррациональных чисел является иррациональным числом.

Нужно подобрать такие два иррациональных числа, которые в сумме дали бы бесконечную десятичную периодическую дробь. В качестве первого слагаемого можно взять число из предыдущей задачи:  $1,323223222\dots$ . Тогда вторым слагаемым может быть число  $1,676776777\dots$  (группы цифр состоят из одной, двух, трёх и т. д. семёрок, разделённых шестёрками).

$$\begin{array}{r} 1,323223222\dots \\ + 1,676776777\dots \\ \hline 2,999999999\dots \end{array}$$

То есть в сумме получим число  $2,(9)$ , или  $3$ .

Значит, можно подобрать два таких иррациональных числа, которые в сумме дают рациональное число.

– Может ли разность двух иррациональных чисел быть числом рациональным?

– Если число  $a$  – рациональное, а число  $b$  – иррациональное, то каким числом будет сумма  $a + b$  и разность  $a - b$ ?

### VI. Итоги урока.

– Какие множества чисел вы изучили? Как они связаны между собой?

– В виде какой десятичной дроби может быть представлено любое рациональное число?

– Существуют ли иррациональные числа, которые могут быть представлены в виде периодической десятичной дроби?

– В виде каких десятичных дробей представляются иррациональные числа?

**Домашнее задание:** № 284 (б), 289, 291, 293 (дополнительно).

## ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

**Цели:** ввести понятия квадратного корня и арифметического квадратного корня; формировать умение извлекать квадратные корни.

### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

Вычислите:

а)  $7^2$ ;      в)  $11^2$ ;      д)  $\left(\frac{8}{9}\right)^2$ ;      ж)  $\left(\frac{3}{7}\right)^2$ ;

б)  $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ ;      г)  $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ ;      е)  $0,2^2$ ;      з)  $0,6^2$ .

#### III. Объяснение нового материала.

##### 1. Введение понятия квадратного корня.

Сначала необходимо рассмотреть задачу о нахождении стороны квадрата по его площади.

Затем предложить учащимся следующее задание: вписать в пустые клеточки числа, чтобы равенства были верными:

$$\square^2 = 16 \quad \square^2 = \frac{1}{9} \quad \square^2 = 100$$

После этого дать определение квадратного корня из числа.

**Определение:** число  $b$  называют квадратным корнем из числа  $a$ , если  $b^2 = a$ .

Задание: выяснить, является ли число  $n$  квадратным корнем из числа  $m$ , если:

а)  $n = 5, m = 25$ ;

в)  $n = 0,3, m = 0,9$ ;

б)  $n = -7, m = 49$ ;

г)  $n = 6, m = -36$ .

##### 2. Введение понятия арифметического квадратного корня.

Учащиеся должны усвоить существенный признак данного понятия – арифметический квадратный корень является неотри-

цательным числом (то есть необходимо знание того, что равенство  $\sqrt{a} = b$  означает одновременное выполнение двух условий:  $b^2 = a$  и  $b \geq 0$ ).

**За д а н и е:** определить, является ли число  $n$  арифметическим квадратным корнем из числа  $m$ , если:

а)  $n = 8, m = 64$ ;

в)  $n = 0,2, m = 0,4$ ;

б)  $n = -3, m = 9$ ;

г)  $n = 0,4, m = 0,16$ .

### 3. Историческая справка.

Обратим внимание на совпадение в терминах – квадратный корень и корень уравнения. Это совпадение не случайно. Уравнения вида  $x^2 = a$  исторически были первыми сложными уравнениями, и их решения были названы корнями по метафоре, что из стороны квадрата, как из корня, вырастает сам квадрат. В дальнейшем термин «корень» стал употребляться и для произвольных уравнений.

Название «радикал» тоже связано с термином «корень»: латыни корень – *radix* (он же редис – корнеплод). Также слово «радикальный» в русском языке является синонимом слова «коренной». Происхождение же символа  $\sqrt{\quad}$  связывают с написанием латинской буквы *r*.

### 4. Основное свойство арифметического квадратного корня.

Вычислите значения следующих выражений:

$$(\sqrt{4})^2, (\sqrt{25})^2, \left(\sqrt{\frac{1}{81}}\right)^2.$$

Сформулируйте вывод (выносится на доску):

$$\boxed{(\sqrt{a})^2 = a, \text{ если } a \geq 0}$$

## IV. Формирование умений и навыков.

• Выполнение заданий № 298, 299, 300.

На первых порах необходимо, чтобы учащиеся проговаривали вслух и объясняли полученный результат. Например:  $\sqrt{49} = 7$ , поскольку  $7^2 = 49$ .

При нахождении корня из дроби пока нельзя извлекать отдельно корень из числителя и из знаменателя, поскольку соответствующее свойство корней будет рассмотрено позже.

- Дополнительные задания № 305, 306 (а, б), 309.

### **V. Итоги урока.**

- Что называется квадратным корнем из числа  $a$ ?
- Сколько квадратных корней может быть из числа  $a$ ?
- Что такое арифметический квадратный корень из числа  $a$ ?
- Имеет ли смысл запись  $\sqrt{-9}$ ? Почему?
- Всегда ли верно равенство  $(\sqrt{a})^2 = a$ ?

**Домашнее задание:** № 301, 304, 306 (в, г).

## **Урок 28**

### **ПРИМЕНЕНИЕ ПОНЯТИЯ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ПРИ РЕШЕНИИ РАЗЛИЧНЫХ ЗАДАЧ**

**Цели:** продолжить формирование умения извлекать квадратные корни; формировать умение применять понятие квадратного корня при решении различных задач.

#### **Ход урока**

#### **I. Организационный момент.**

#### **II. Проверочная работа.**

#### **Вариант 1**

1. Найдите значение арифметического квадратного корня:

- |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| а) $\sqrt{49}$ ;           | в) $\sqrt{8100}$ ;         | д) $\sqrt{0,09}$ ;         |
| б) $\sqrt{\frac{1}{16}}$ ; | г) $\sqrt{\frac{1}{25}}$ ; | е) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$ . |

2. Найдите значение выражения:

- |                                   |  |
|-----------------------------------|--|
| а) $\sqrt{64} : \sqrt{400}$ ;     | в) $7 \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^2$ ; |
| б) $\frac{1}{6}\sqrt{0,36} - 1$ ; | г) $\sqrt{4^2 + 33}$ .                           |

## Вариант 2

1. Найдите значение арифметического квадратного корня:

а)  $\sqrt{36}$ ;

в)  $\sqrt{1600}$ ;

д)  $\sqrt{0,04}$ ;

б)  $\sqrt{\frac{1}{9}}$ ;

г)  $\sqrt{\frac{1}{49}}$ ;

е)  $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ .

2. Найдите значение выражения:

а)  $\sqrt{81} : \sqrt{900}$ ;

в)  $6 \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right)^2$ ;

б)  $\frac{1}{8}\sqrt{0,64} - 2$ ;

г)  $\sqrt{5^2 + 24}$ .

### III. Формирование умений и навыков.

Задания этого урока можно разделить на две группы:

1-я группа. Задания на нахождение значений квадратных корней: № 302, 307.

№ 307.

а) Чтобы значение выражения  $\sqrt{11-n}$  являлось натуральным числом, подкоренное выражение должно быть равно 1, 4 или 9. Получаем три случая:

$$11 - n = 1$$

$$n = 10$$

$$11 - n = 4$$

$$n = 7$$

$$11 - n = 9$$

$$n = 2.$$

Эти же значения можно было найти подбором.

Ответ: 2; 7; 10.

2-я группа. Задания на решение простейших уравнений с квадратным корнем: № 310, 311, 312.

– Найдите значение переменной  $x$ , при котором верно равенство:

а)  $\sqrt{2x-1} = 3$ ;

б)  $\sqrt{3-5x} = 7$ ;

в)  $\sqrt{4x + \frac{2}{3}} = 0$ .

Решение

а)  $\sqrt{2x-1} = 3$ .

Нужно найти такое число, корень которого равен 3. Это число 9, то есть  $2x - 1 = 9$ ;  $2x = 10$ ;  $x = 5$ .

Нельзя допускать, чтобы учащиеся полагали, что при решении этого уравнения обе части возводятся в квадрат. Иначе, решая в дальнейшем, например, уравнение  $\sqrt{x+1} = -2$ , они перейдут к уравнению  $x + 1 = 4$ .

$$\text{б) } \sqrt{3 - 5x} = 7$$

$$3 - 5x = 49$$

$$5x = -46$$

$$x = -9,6.$$

$$\text{в) } \sqrt{4x + \frac{2}{3}} = 0$$

$$4x + \frac{2}{3} = 0$$

$$4x = -\frac{2}{3}$$

$$x = -\frac{1}{6}.$$

**№ 315** (дополнительное задание).

#### Решение

Чтобы значение выражения  $\sqrt{n^2 + 39}$  являлось двузначным числом, необходимо выполнить два условия:

1) корень из этого выражения должен извлекаться;

2) квадраты числа  $n$  и числа  $n^2 + 39$  должны отличаться на 39.

Пользуясь таблицей квадратов натуральных чисел, заметим, что, начиная с 20, квадраты чисел отличаются друг от друга более чем на 40. Значит, число  $n$  нужно искать среди чисел двух первых десятков.

Заметим, что только квадраты чисел 19 и 20 отличаются на 39;  $19^2 = 361$  и  $20^2 = 400$ . Это означает, что  $n = 19$ . Получим:

$$\sqrt{n^2 + 39} = \sqrt{19^2 + 39} = \sqrt{361 + 39} = \sqrt{400} = 20.$$

Ответ:  $n = 19$ .

#### IV. Итоги урока.

– Что называется арифметическим квадратным корнем из числа  $a$ ?

– Может ли подкоренное выражение быть отрицательным?

– Когда уравнение  $\sqrt{x} = a$  имеет решение? Сколько решений может иметь такое уравнение?

– Как решаются уравнения вида  $\sqrt{x} = a$ ?

**Домашнее задание:** № 303, 313, 314, 466 (дополнительно).

## Урок 29

### РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА $x^2 = a$

**Цель:** рассмотреть вопрос о количестве корней уравнения  $x^2 = a$  и формировать умение решать такие уравнения.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Устная работа.

Вычислите:

а)  $\sqrt{0,04}$ ;

г)  $\sqrt{\frac{16}{49}}$ ;

ж)  $0,3^2$ ;

б)  $\sqrt{\frac{81}{121}}$ ;

д)  $\sqrt{2,25}$ ;

з)  $(-0,3)^2$ ;

в)  $\sqrt{196}$ ;

е)  $\sqrt{\frac{144}{169}}$ ;

и)  $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ .

##### III. Объяснение нового материала.

Желательно, чтобы учащиеся самостоятельно решили вопрос о возможном количестве корней уравнения вида  $x^2 = a$ .

**Задание:** какие числа можно вписать в пустые карточки, чтобы равенство было верным?

а)  $\square^2 = 25$ ;

г)  $\square^2 = -\frac{1}{16}$ ;

б)  $\square^2 = \frac{1}{4}$ ;

д)  $\square^2 = 0$ ;

в)  $\square^2 = -9$ ;

е)  $\square^2 = \frac{4}{81}$ .

Рассмотрим уравнение  $x^2 = a$ . Сформулируйте утверждение о различных случаях, возникающих при поиске корней таких уравнений (запись выносится на доску):

Уравнение  $x^2 = a$

1) имеет 2 корня, если  $a > 0$ ;

2) имеет 1 корень, если  $a = 0$ ;

3) не имеет корней, если  $a < 0$ .



Графическая интерпретация решения уравнения  $x^2 = a$ .

Вывод: если  $a > 0$ , то корнями уравнения  $x^2 = a$  будут числа  $\sqrt{a}$  и  $-\sqrt{a}$ .

#### IV. Формирование умений и навыков.

• № 319, 320, 321 (а, в).

• Задание. Даны уравнения:

$$x^2 = 16, \quad x^2 = -100, \quad x^2 = 5, \quad x^2 = 0, \quad x^2 = \frac{4}{9}.$$

Выберите из них те, которые:

а) имеют два корня;

б) имеют два рациональных корня;

в) имеют два иррациональных корня;

г) имеют один корень;

д) не имеют корней.

• № 322.

• Задание. Составьте какое-нибудь уравнение, имеющее корни: а) 7 и  $-7$ ; б) 0,2 и  $-0,2$ ; в)  $\sqrt{3}$  и  $-\sqrt{3}$ .

Соревнование: у кого из вас получится больше различных уравнений к каждому случаю?

Например, в первом случае можно составить такие уравнения:

$$x^2 = 49, \quad 2x^2 = 98, \quad x^2 + 1 = 50, \quad 10 - x^2 = -39 \text{ и т. п.}$$

• № 324 (а, в).

Образец оформления:

а)  $(x - 3)^2 = 25$

$$x - 3 = 5 \quad \text{или} \quad x - 3 = -5$$

$$x = 8 \quad \quad \quad x = -2$$

Ответ:  $-2$ ;  $8$ .

#### V. Итоги урока.

– Что называется арифметическим квадратным корнем из числа?

– Может ли в выражении  $\sqrt{a}$  число  $a$  быть отрицательным?

Почему?

– Сколько корней может иметь уравнение  $x^2 = a$ ? От чего это зависит?

– Какие корни имеет уравнение  $x^2 = a$ , если  $a > 0$ ;  $a = 0$ ?

Домашнее задание: № 321 (б, г), 323, 324 (б, г).

## Урок 30

### ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

**Цель:** продолжить формирование умений преобразовывать выражения, содержащие квадратные корни.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

1. Вычислите:

а)  $\sqrt{121}$ ;

в)  $\sqrt{900}$ ;

д)  $\sqrt{0,25}$ ;

б)  $\sqrt{\frac{4}{49}}$ ;

г)  $\sqrt{\frac{1}{225}}$ ;

е)  $\sqrt{\frac{36}{81}}$ .

2. Решите уравнение:

а)  $x^2 = 16$ ;

в)  $x^2 = 0$ ;

д)  $x^2 = 0,04$ ;

б)  $x^2 = \frac{1}{49}$ ;

г)  $x^2 = -\frac{1}{4}$ ;

е)  $x^2 = \frac{100}{121}$ .

#### III. Формирование умений и навыков.

• Все задания можно разбить на две группы:

1-я группа. Задания на нахождение допустимых значений переменных, входящих в выражения с квадратным корнем: № 325, 326.

– Укажите несколько значений переменной  $x$ , при которых выражение  $\sqrt{4-2x}$  имеет смысл.

2-я группа. Задания на вычисление значений выражений, содержащих квадратные корни: № 328.

– Найдите значение выражения:

а)  $(-\sqrt{3})^2$ ;

в)  $\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2$ ;

д)  $(2\sqrt{5})^2$ ;

б)  $4\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$ ;

г)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\right)^2$ ;

е)  $(-3\sqrt{2})^2$ .

- Дополнительные задания: № 330, № 332, 331 (а, в).  
**№ 331.**

а)  $(2 - \sqrt{5})^2 + 4\sqrt{5} = 4 - 4\sqrt{5} + 5 + 4\sqrt{5} = 9;$

в)  $(2 - \sqrt{5})^2 + (2 + \sqrt{5})^2 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 + 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 18.$

- Задания на карточках для сильных учащихся.

### Карточка 1

1. Решите уравнение:  $\frac{2}{5}(x-10)^2 = \frac{4}{5}.$

2. Из формулы  $W = \sqrt{\frac{t}{n}}$  выразить  $t.$

3. При каких значениях переменной  $x$  имеет смысл выражение:

а)  $\frac{2}{\sqrt{x}};$

б)  $\frac{1}{\sqrt{x+1}};$

в)  $\frac{7}{\sqrt{x-2}}?$

### Карточка 2

1. Решите уравнение:  $\frac{(x-1)^2}{3} = 5\frac{1}{3}.$

2. Из формулы  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  выразите  $l.$

3. При каких значениях переменной  $x$  имеет смысл выражение:

а)  $\frac{3}{\sqrt{x}};$

б)  $\frac{2}{\sqrt{x+2}};$

в)  $\frac{1}{\sqrt{x-3}}?$

## IV. Проверочная работа.

### Вариант 1

1. Решите уравнение:

а)  $x^2 = 36;$

г)  $3 - x^2 = 3;$

б)  $x^2 = \frac{1}{4};$

д)  $2x^2 + 6 = 0;$

в)  $x^2 + 1 = 3;$

е)  $\left(x - \frac{1}{9}\right)^2 = \frac{4}{81}.$

2. Имеет ли смысл выражение  $\sqrt{10-3x}$  при:

а)  $x = 2$ ;

в)  $x = 4$ ;

б)  $x = 0$ ;

г)  $x = -1$ .

3. Найдите значение выражения:

а)  $(-\sqrt{11})^2$ ;

в)  $(-2\sqrt{10})^2$ ;

б)  $-3\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}$ ;

г)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2$ .

### Вариант 2

1. Решите уравнение:

а)  $x^2 = 64$ ;

г)  $5 - x^2 = 5$ ;

б)  $x^2 = \frac{1}{9}$ ;

д)  $3x^2 + 12 = 0$ ;

в)  $x^2 - 2 = 1$ ;

е)  $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ .

2. Имеет ли смысл выражение  $\sqrt{13-2x}$  при

а)  $x = 3$ ;

в)  $x = 7$ ;

б)  $x = \frac{1}{2}$ ;

г)  $x = -4$ .

3. Найдите значение выражения:

а)  $(-\sqrt{7})^2$ ;

в)  $(-3\sqrt{5})^2$ ;

б)  $-2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$ ;

г)  $\left(\frac{\sqrt{2}}{9}\right)^2$ .

### V. Итоги урока.

– Сколько корней может иметь уравнение  $x^2 = a$ ? От чего это зависит?

– Какие корни имеет уравнение  $x^2 = a$ , если  $a > 0$ ;  $a = 0$ ?

– При каких значениях  $a$  выражение  $\sqrt{a}$  имеет смысл?

– При каких значениях  $b$  выражение  $\sqrt{-b}$  имеет смысл?

**Домашнее задание:** № 327, 329, 331 (б, г), 332.

## Урок 31

### НАХОЖДЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КВАДРАТНОГО КОРНЯ С ПОМОЩЬЮ ОЦЕНКИ И НА КАЛЬКУЛЯТОРЕ

**Цель:** формировать умение находить приближенные значения квадратного корня при помощи оценки и на калькуляторе.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

Вычислите:

а)  $\sqrt{81}$ ;                      г)  $\sqrt{\frac{4}{25}}$ ;                      ж)  $\sqrt{0,0036}$ ;

б)  $\sqrt{\frac{1}{49}}$ ;                      д)  $\sqrt{900}$ ;                      з)  $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$ ;

в)  $\sqrt{225}$ ;                      е)  $\sqrt{\frac{100}{121}}$ ;                      и)  $(2\sqrt{3})^2$ ;

#### III. Объяснение нового материала по учебнику.

Сначала показать учащимся, как найти приближённое значение квадратного корня, оценивая его. При этом желательно привлекать учащихся к «открытию» этого способа. Затем попросить их сформулировать, как с помощью оценки может быть найдено приближённое значение любого квадратного корня.

Приведем несколько примеров, как применяется калькулятор для извлечения квадратных корней.

#### IV. Формирование умений и навыков.

• Все задания можно разбить на две группы:

1-я группа. Задания на нахождение приближенных значений квадратных корней с помощью оценки: № 336.

– Площадь квадрата равна  $5 \text{ см}^2$ . Чему равна его сторона? Дайте точный ответ, записав его с помощью знака  $\sqrt{\quad}$ , и приближённый, выразив результат десятичной дробью с двумя знаками после запятой.

2-я группа. Задания на нахождение приближенных значений квадратных корней с помощью калькулятора: № 338 (б).

– С помощью калькулятора найдите значение  $\sqrt{n}$  для всех натуральных  $n$  от 1 до 10. Заполните таблицу, указывая приближённое значение  $\sqrt{n}$  с тремя знаками после запятой.

| $n$        | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| $\sqrt{n}$ |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

Используя таблицу, сравните  $\sqrt{6}$  и  $\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt{7}$ ;  $\sqrt{10}$  и  $\sqrt{8}$ .

• Дополнительные задания: № 342, 343, 344 (а, в, д), 345, 347.

### В. Тест с последующей проверкой.

«+» – согласен с утверждением;

«–» – не согласен с утверждением.

Утверждения:

1)  $\sqrt{27}$  – это иррациональное число;

2)  $\sqrt{64}$  – это иррациональное число;

3)  $\sqrt{32}$  – это действительное число;

4)  $\sqrt{81}$  – это действительное число;

5)  $\sqrt{3}$  меньше 1;

6)  $\sqrt{190}$  больше  $\sqrt{160}$ .

7) Любое иррациональное число заключено между двумя целыми числами;

8) Если число стоит под корнем, то оно иррациональное;

9)  $\sqrt{7}$  меньше, чем  $-\sqrt{10}$ ;

10)  $\sqrt{59}$  заключено между числами 7 и 8.

Ключ:

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| + | – | + | + | – | + | + | – | – | +  |

### VI. Итоги урока.

Учащиеся, сидящие за одной партой, обмениваются «ключами» к тесту. Учитель снова читает все десять утверждений, каждое из которых обсуждается. Одновременно учащиеся про-

веряют свои работы и ставят друг другу отметки по следующей шкале:

- «5» – все ответы верные;
- «4» – одна или две ошибки;
- «3» – три или четыре ошибки;
- «2» – более четырёх ошибок.

– Как найти приближённое значение квадратного корня с помощью метода оценки; с помощью калькулятора?

– Какое из чисел,  $\sqrt{5}$  или  $\sqrt{7}$ , расположено левее на числовой оси? Почему?

**Домашнее задание:** № 337, 339, 334 (б, г, е), 346.

## Урок 32

### ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = \sqrt{x}$ И ПРИМЕНЕНИЕ ЕЁ СВОЙСТВ

**Цели:** изучить функцию  $y = \sqrt{x}$ , её график и свойства; формировать умение строить график этой функции и применять её свойства.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Устная работа.

1. Решите уравнение:

а)  $x^2 = 16$ ;                      в)  $x^2 = 0$ ;                      д)  $x^2 = 10$ ;

б)  $x^2 = \frac{1}{49}$ ;                      г)  $x^2 = -\frac{1}{4}$ ;                      е)  $x^2 = \frac{2}{3}$ .

2. Вычислите:

а)  $\sqrt{36}$ ;                      в)  $\sqrt{40000}$ ;                      д)  $\sqrt{0,0025}$ ;

б)  $\sqrt{\frac{1}{81}}$ ;                      г)  $\sqrt{\frac{49}{121}}$ ;                      е)  $\left(-\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^2$ .

##### III. Объяснение нового материала.

1) Рассмотреть по учебнику, из каких практических ситуаций возникает потребность в изучении функции  $y = \sqrt{x}$ .







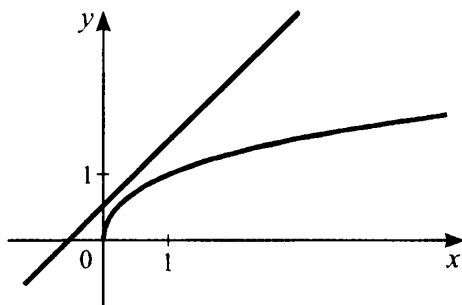
2. Расположите числа в порядке убывания:

а)  $5; \sqrt{21}; \sqrt{35,8}; 7\frac{1}{3}$ ;      б)  $0,25; \sqrt{0,5}; \frac{1}{3}$  и  $\sqrt{0,2}$ .

3. Выполните задания по учебнику: № 358, 362 (а), 359.  
№ 359.

Чтобы доказать, что графики функций  $y = \sqrt{x}$  и  $y = x + 0,5$  не имеют общих точек, достаточно их построить.

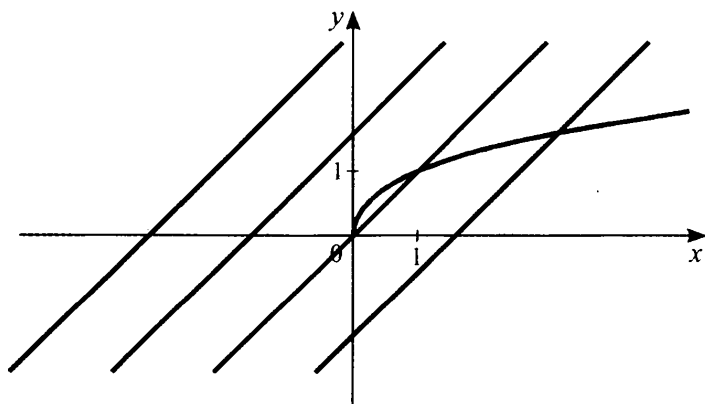
Можно эту задачу решить аналитически, показав, что с увеличением значений аргумента значения функции  $y = x + 0,5$  увеличиваются быстрее, чем значения функции  $y = \sqrt{x}$ .



4. Дополнительные задания для учащихся с высоким уровнем подготовки: № 360 (а, в), 361, 475.

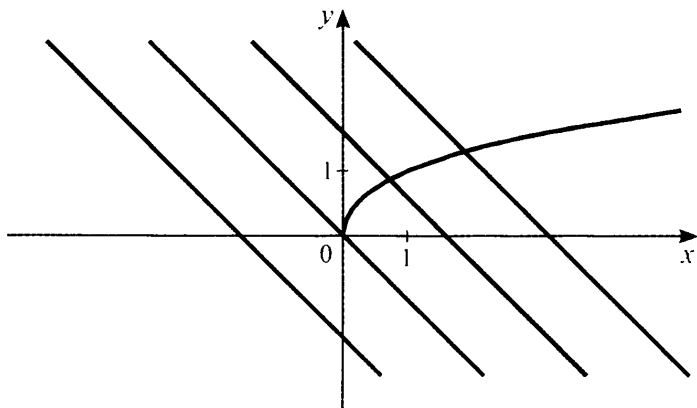
№ 475.

а) Построим график функции  $y = \sqrt{x}$  и будем относительно него передвигать прямые вида  $y = x + b$ . Это параллельные прямые, которые образуют острый угол с положительным направлением оси абсцисс.



Таким образом, очевидно, что уравнение  $\sqrt{x} = x + b$  может иметь один, два корня, а может и не иметь корней.

б) Прямые вида  $y = -x + b$  – это параллельные прямые, которые образуют тупой угол с положительным направлением оси абсцисс.



Получаем, что уравнение  $\sqrt{x} = -x + b$  имеет либо один корень, либо не имеет корней.

#### IV. Проверочная работа.

##### Вариант 1

1. Постройте график функции  $y = \sqrt{x}$ . По графику найдите:

а) значение функции при  $x = 1; 3; 4; 6$ .

б) значение аргумента, которому соответствует значение  $y = \frac{1}{4}; 1; 1,8; 3$ .

2. Принадлежит ли графику функции  $y = \sqrt{x}$  точка:

а)  $A(36; 6)$ ;      б)  $B(-9; 3)$ ;      в)  $C\left(\frac{1}{49}; \frac{1}{7}\right)$ ?

3. Сравните числа:

а)  $\sqrt{32}$  и  $\sqrt{29}$ ;      б)  $\sqrt{1,4}$  и  $\sqrt{\frac{2}{9}}$ ;      в)  $2$  и  $\sqrt{\frac{1}{5}}$ ;      г)  $\sqrt{4,7}$  и  $2$ .

##### Вариант 2

1. Постройте график функции  $y = \sqrt{x}$ . По графику найдите:

а) значение функции при  $x = 0; 2; 5; 9$ .

б) значение аргумента, которому соответствует значение  $y = 0,49; 1,5; 2\frac{1}{4}; 2,8$ .

2. Принадлежит ли графику функции  $y = \sqrt{x}$  точка:

а)  $A(81; 9)$ ;      б)  $B(-16; 4)$ ;      в)  $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ ?

3. Сравните числа:

а)  $\sqrt{17}$  и  $\sqrt{21}$ ;      б)  $\sqrt{\frac{3}{5}}$  и  $\sqrt{1,2}$ ;      в) 3 и  $\sqrt{\frac{7}{2}}$ ;      г)  $\sqrt{15,1}$  и 4.

### V. Итоги урока.

- Какими свойствами обладает функция  $y = \sqrt{x}$ ?
- Как сравнить два квадратных корня?
- Сколько общих точек могут иметь графики функций  $y = \sqrt{x}$  и  $y = kx + b$ ?

**Домашнее задание:** № 360 (б, г), 362 (б), 365.

## Урок 34

### ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ДРОБИ

**Цели:** выявить и доказать свойства квадратного корня; формировать умение непосредственно применять их при вычислениях.

#### Ход урока

**I. Организационный момент.**

**II. Устная работа.**

Вычислите:

а)  $\sqrt{3^2 \cdot 2^2}$ ;      г)  $\sqrt{\frac{1}{196}}$ ;      ж)  $\sqrt{2,25}$ ;

б)  $\sqrt{\frac{4}{121}}$ ;      д)  $\sqrt{4 \cdot 9}$ ;      з)  $\sqrt{\frac{1}{361}}$ ;

в)  $\sqrt{0,0036}$ ;      е)  $\sqrt{\frac{25}{169}}$ ;      и)  $2\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$ .

### III. Объяснение нового материала.

При объяснении необходимо показать преимущество, которое дает при вычислениях использование свойств корней.

**З а д а н и е:** вычислите на калькуляторе значения нескольких корней:

$$1) \sqrt{25 \cdot 49}; \quad 2) \sqrt{0,36 \cdot 81}; \quad 3) \sqrt{0,04 \cdot 0,64}.$$

– Вычислите другим способом – без использования калькулятора:

$$\sqrt{25 \cdot 49} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{49} = 5 \cdot 7 = 35;$$

$$\sqrt{0,36 \cdot 81} = \sqrt{0,36} \cdot \sqrt{81} = 0,6 \cdot 9 = 5,4;$$

$$\sqrt{0,04 \cdot 0,64} = \sqrt{0,04} \cdot \sqrt{0,64} = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16.$$

Сравните результаты и выдвиньте предположения. *(Такой прием будет справедлив для любых неотрицательных чисел.)*

Сформулируйте данное свойство.

Учитель четко сам формулирует свойство: корень из произведения неотрицательных чисел равен произведению корней из этих чисел.

Проводится доказательство свойства (выносится на доску):

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \text{для любых } a \geq 0 \quad b \geq 0$$

Аналогично формулируется второе свойство (выносится на доску):

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{для любых } a \geq 0 \quad b > 0$$

Вычислите  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ . (Большинство учащихся догадается внести множители под общий корень.)

Использование полученных равенств справа налево дает правила умножения и деления корней:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \text{где } a \geq 0 \text{ и } b \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \text{где } a \geq 0 \text{ и } b > 0$$

#### IV. Формирование умений и навыков.

На этом уроке основное внимание следует уделить непосредственному применению изученных свойств квадратных корней при вычислениях.

- № 369, 370, 378, 379.
- № 382, 383, 385 (а, в, д, ж), 386.

#### V. Итоги урока.

- Сформулируйте свойство вычисления корня из произведения неотрицательных чисел.
- Сформулируйте свойство вычисления корня из частного от деления неотрицательного числа на положительное число.
- Сформулируйте правила умножения и деления корней.
- Как вычислить корень из смешанного числа?

**Домашнее задание:** № 371, 384, 385 (б, г, е, з).

### Урок 35

## КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ ИЗ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ДРОБИ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ВЫРАЖЕНИЙ С КОРНЕМ

**Цель:** продолжить формирование умения применять свойства квадратного корня при преобразовании выражений.

### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

- |                                |   |  |
|--------------------------------|---|--|
| а) $\sqrt{0,0004}$ ;           | г) $2\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$ ; | ж) $\sqrt{1,96}$ ;                                 |
| б) $\sqrt{\frac{1}{121}}$ ;    | д) $\sqrt{12^2}$ ;                                  | з) $\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}$ ; |
| в) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$ ; | е) $\sqrt{\frac{81}{144}}$ ;                        | и) $\sqrt{22500}$ .                                |

### III. Формирование умений и навыков.

• Выполнение заданий № 372, 387 (а, в, д, ж), 374, 376, 380.

#### № 374.

Это задание может вызвать затруднения у учащихся. Раньше им встречались выражения вида  $\sqrt{ab}$ , в которых  $\sqrt{a}$  и  $\sqrt{b}$  извлекались. При выполнении предложенного задания это свойство корней напрямую применять нецелесообразно.

Необходимо подкоренное выражение представить в виде произведения таких множителей, из которых корень извлекается.

$$а) \sqrt{810 \cdot 40} = \sqrt{81 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 10} = \sqrt{81 \cdot 4 \cdot 100} = 9 \cdot 2 \cdot 10 = 180;$$

$$б) \sqrt{10 \cdot 250} = \sqrt{10 \cdot 25 \cdot 10} = \sqrt{100 \cdot 25} = 10 \cdot 5 = 50;$$

$$в) \sqrt{72 \cdot 32} = \sqrt{36 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 2} = \sqrt{36 \cdot 16 \cdot 4} = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48;$$

$$г) \sqrt{8 \cdot 98} = \sqrt{4 \cdot 2 \cdot 49 \cdot 2} = \sqrt{49 \cdot 4 \cdot 4} = 7 \cdot 2 \cdot 2 = 28;$$

$$д) \sqrt{50 \cdot 18} = \sqrt{25 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2} = \sqrt{25 \cdot 9 \cdot 4} = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30;$$

$$е) \sqrt{2,5 \cdot 14,4} = \sqrt{25 \cdot 0,1 \cdot 14,4} = \sqrt{25 \cdot 1,44} = 5 \cdot 1,2 = 6;$$

$$ж) \sqrt{90 \cdot 6,4} = \sqrt{9 \cdot 10 \cdot 6,4} = \sqrt{9 \cdot 64} = 3 \cdot 8 = 24;$$

$$з) \sqrt{16,9 \cdot 0,4} = \sqrt{1,69 \cdot 10 \cdot 0,4} = \sqrt{1,69 \cdot 4} = 1,3 \cdot 2 = 2,6.$$

#### № 376.

Учащиеся довольно часто допускают следующую ошибку:

$$\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{13^2} - \sqrt{12^2} = 13 - 12 = 1.$$

В этом случае следует предложить им вычислить значение подкоренного выражения, извлечь корень и сравнить полученные результаты.

Данный пример помогает избежать подобных ошибок в дальнейшем и еще раз заостряет внимание учащихся на свойствах квадратных корней.

Если в примерах а) и б) учащиеся просто могут вычислить значение подкоренного выражения и извлечь корень, то в следующих примерах это можно сделать только при помощи калькулятора. Чтобы учащиеся «увидели» формулу разности квадратов, нужно требовать вычислений без калькулятора.

$$в) \sqrt{313^2 - 312^2} = \sqrt{(313 - 312)(313 + 312)} = \sqrt{1 \cdot 625} = 25;$$

$$\begin{aligned} \text{д) } \sqrt{45,8^2 - 44,2^2} &= \sqrt{(45,8 - 44,2)(45,8 + 44,2)} = \sqrt{1,6 \cdot 90} = \\ &= \sqrt{1,6 \cdot 9 \cdot 10} = \sqrt{16 \cdot 9} = 4 \cdot 3 = 12. \end{aligned}$$

**№ 380.**

$$\text{а) } 10\sqrt{\frac{a}{100}} = \sqrt{a}.$$

Преобразуем выражение, стоящее в правой части равенства:

$$10\sqrt{\frac{a}{100}} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{\frac{a}{100}} = \sqrt{100 \cdot \frac{a}{100}} = \sqrt{a}.$$

$$\text{б) } \sqrt{a} = \frac{1}{10}\sqrt{100a}.$$

$$\frac{1}{10}\sqrt{100a} = \sqrt{\frac{1}{100}} \cdot \sqrt{100a} = \sqrt{\frac{1}{100} \cdot 100a} = \sqrt{a}.$$

• Задания на карточках для сильных учащихся.

### Карточка 1

1. Расположите в порядке возрастания числа:  $\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2\sqrt{2}}$ .

2. Найдите значение выражения:

$$\text{а) } \sqrt{30 \cdot 66 \cdot 220};$$

$$\text{б) } 2\sqrt{25} \cdot 3\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{30} \cdot \sqrt{3};$$

$$\text{в) } \sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}.$$

3. Известно, что  $a < 0$  и  $b < 0$ . Представьте выражение  $\sqrt{ab}$  в виде произведения корней.

### Карточка 2

1. Расположите в порядке возрастания числа:  $\frac{5}{12}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

2. Найдите значение выражения:

$$\text{а) } \sqrt{54 \cdot 48 \cdot 50};$$

$$\text{б) } 4\sqrt{5} \cdot \sqrt{45} \cdot \sqrt{50} \cdot 3\sqrt{2};$$

$$\text{в) } \sqrt{\frac{98}{176^2 - 112^2}}.$$

3. Известно, что  $a < 0$  и  $b < 0$ . Представьте выражение  $\sqrt{\frac{a}{b}}$  в виде частного корней.



## Решение заданий карточки 1

1. Все дроби имеют числители, равные 1. Поэтому достаточно сравнить знаменатели дробей. Имеем:

$$2\sqrt{2} < 3 < \sqrt{10}, \text{ поэтому } \frac{1}{\sqrt{10}} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$2. \text{ а) } \sqrt{30 \cdot 66 \cdot 220} = \sqrt{3 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 11} = \sqrt{100 \cdot 121 \cdot 36} = 10 \cdot 11 \cdot 6 = 660;$$

$$\text{б) } 2\sqrt{15} \cdot 3\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{30} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{15 \cdot 6 \cdot 30 \cdot 3} = 24\sqrt{5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3} = 24\sqrt{25 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 9} = 24 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 2160;$$

$$\text{в) } \sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}} = \sqrt{\frac{(165 - 124)(165 + 124)}{164}} = \sqrt{\frac{41 \cdot 289}{164}} = \sqrt{\frac{289}{4}} = \frac{17}{2} = 8,5.$$

3. Если  $a < 0$  и  $b < 0$ , то  $\sqrt{ab} \neq \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ .

Чтобы подкоренные выражения стали положительными, перед ними нужно поставить «минус». Получим, что

$$\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}.$$

### IV. Итоги урока.

– Сформулируйте свойство вычисления корня из произведения неотрицательных чисел.

– Сформулируйте свойство вычисления корня из частного от деления неотрицательного числа на положительное число.

– Сформулируйте правила умножения и деления корней.

– Как преобразовать выражение вида  $\sqrt{xy}$ , если корни из чисел  $x$  и  $y$  не извлекаются?

**Домашнее задание:** № 373, 375, 377 (б, г, е), 387 (б, г, е, з).

## Урок 36

# ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВА КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ СТЕПЕНИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

**Цель:** изучить свойство квадратного корня из степени и формировать умение его применять при вычислении выражений с корнем.

### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Проверочная работа.

##### Вариант 1

1. Найдите значение корня:

а)  $\sqrt{9 \cdot 36}$ ;      в)  $\sqrt{6,25 \cdot 0,16}$ ;      д)  $\sqrt{11\frac{1}{9}}$ ;

б)  $\sqrt{0,64 \cdot 25}$ ;      г)  $\sqrt{\frac{49}{81}}$ ;      е)  $\sqrt{3\frac{13}{36}}$ .

2. Найдите значение выражения:

а)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$ ;      в)  $\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{11}}$ ;      д)  $\sqrt{5 \cdot 45}$ ;

б)  $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{50}}$ ;      г)  $\sqrt{\frac{3}{7}} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{7}}$ ;      е)  $\sqrt{12,1 \cdot 0,4}$ .

##### Вариант 2

1. Найдите значение корня:

а)  $\sqrt{25 \cdot 81}$ ;      в)  $\sqrt{400 \cdot 2,25}$ ;      д)  $\sqrt{3\frac{6}{25}}$ ;

б)  $\sqrt{0,49 \cdot 16}$ ;      г)  $\sqrt{\frac{9}{64}}$ ;      е)  $\sqrt{2\frac{46}{49}}$ .

2. Найдите значение выражения:

а)  $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ ;      в)  $\frac{\sqrt{444}}{\sqrt{111}}$ ;      д)  $\sqrt{12 \cdot 75}$ ;

б)  $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{112}}$ ;      г)  $\sqrt{\frac{1}{11}} \cdot \sqrt{\frac{11}{13}} \cdot \sqrt{\frac{13}{25}}$ ;      е)  $\sqrt{4,9 \cdot 0,9}$ .

### III. Объяснение нового материала.

Вам знакомо следующее свойство:  $(\sqrt{x})^2 = x$ .

Вычислите устно:

а)  $(\sqrt{5})^2$ ;                      в)  $(-\sqrt{7})^2$ ;                      д)  $(2\sqrt{10})^2$ ;  
б)  $(\sqrt{\frac{2}{3}})^2$ ;                      г)  $(-\sqrt{\frac{1}{5}})^2$ ;                      е)  $(-\frac{1}{2}\sqrt{8})^2$ .

Выдвиньте предположение: чему равно значение выражения  $\sqrt{x^2}$ ? (Часто учащиеся говорят: как  $(\sqrt{x})^2 = x$ , так и  $\sqrt{x^2} = x$ .)

Вы поняли, в чём состоит ошибка? Возьмите конкретные значения  $x$  и подставьте их в выражение  $\sqrt{x^2}$ . Например,  $x = 5$ ;  $\frac{1}{2}$ ;  $-1$ ;  $-3$ .

Полученные равенства вынести на доску:

$$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5; \qquad \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1;$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}; \qquad \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Сформулируйте, в чём состояла ваша ошибка и как её исправить. Если  $x$  – положительное число, то  $\sqrt{x^2} = x$ , а если  $x$  – отрицательное число, то  $\sqrt{x^2} = -x$ . Поэтому

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

### IV. Формирование умений и навыков.

• Выполнение заданий: № 393 (а, в, д, ж, и), 394 (а, б), 402, 403.

#### № 393.

На первых порах нужно требовать от учащихся подробных записей:

а)  $\sqrt{(0,1)^2} = |0,1| = 0,1$ ;                      в)  $\sqrt{(-0,8)^2} = |-0,8| = 0,8$ .

Это позволит закрепить изученное свойство и избежать ошибок в дальнейшем.

**№ 402.**

При выполнении этого задания также необходимо вести подробные записи.

$$а) \sqrt{11^4} = \sqrt{(11^2)^2} = |11^2| = 121;$$

$$в) \sqrt{(-3)^8} = \sqrt{((-3)^4)^2} = |(-3)^4| = 81;$$

$$д) \sqrt{2^8 \cdot 3^2} = \sqrt{2^8} \cdot \sqrt{3^2} = \sqrt{(2^4)^2} \cdot \sqrt{3^2} = |2^4| \cdot |3| = 16 \cdot 3 = 48.$$

**№ 403.**

$$а) \sqrt{20736} = \sqrt{2^8 \cdot 3^4} = \sqrt{2^8} \cdot \sqrt{3^4} = 16 \cdot 9 = 144;$$

$$г) \sqrt{680625} = \sqrt{5^4 \cdot 3^2 \cdot 11^2} = \sqrt{5^4} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{11^2} = 25 \cdot 3 \cdot 11 = 825.$$

• Дополнительное задание (для учащихся с высоким уровнем подготовки).

**№ 482.**

$$а) \sqrt{4^3} = \sqrt{4^2 \cdot 4} = \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{4} = 4 \cdot 2 = 8;$$

$$в) \sqrt{16^5} = \sqrt{16^4 \cdot 16} = \sqrt{16^4} \cdot \sqrt{16} = 256 \cdot 4 = 1024;$$

$$д) \sqrt{8 \cdot 162} = \sqrt{2^3 \cdot 2 \cdot 81} = \sqrt{2^4 \cdot 3^4} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^4} = 4 \cdot 9 = 36;$$

$$\begin{aligned} ж) \sqrt{750 \cdot 270} &= \sqrt{25 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 27 \cdot 10} = \sqrt{5^2 \cdot 3^4 \cdot 10^2} = \\ &= \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3^4} \cdot \sqrt{10^2} = 25 \cdot 9 \cdot 10 = 2250. \end{aligned}$$

**V. Итоги урока.**

– Чему равно выражение  $(\sqrt{x})^2$ ?

– Сформулируйте свойство квадратного корня из квадрата.

– Чему равно выражение  $\sqrt{x^2}$ , если  $x > 0$ ?  $x < 0$ ?

– При каких значениях  $x$  верно равенство  $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$ ?

**Домашнее задание:** № 393 (б, г, е, з), 394 (в), 401, 404.

## Урок 37

# КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ ИЗ СТЕПЕНИ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИИ РАЗЛИЧНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

**Цель:** продолжить формирование умения применять свойство квадратного корня из степени.

### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

Вычислите:

а)  $\sqrt{7^2}$ ;                      в)  $\sqrt{(-3)^2}$ ;                      д)  $2\sqrt{(-11)^2}$ ;

б)  $\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2}$ ;                      г)  $\sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2}$ ;                      е)  $\frac{1}{2}\sqrt{8^2}$ .

#### III. Формирование умений и навыков.

Все задания можно условно разбить на две группы.

1-я группа. Задания, в которых необходимо применить формулу  $\sqrt{x^2} = |x|$ , раскрыв знак модуля в зависимости от значения  $x$ : № 395, 396 (а, б, г, д, ж), 484 (устно), 487 (а, б, г, ж).

#### № 487.

а)  $\sqrt{a^4 b^4} = \sqrt{(a^2)^2} \cdot \sqrt{(b^2)^2} = |a^2| \cdot |b^2|$ .

Так как  $a^2 \geq 0$  при любом  $a$  и  $b^2 \geq 0$  при любом  $b$ , то  $|a^2| = a^2$  и  $|b^2| = b^2$ . Имеем:  $\sqrt{a^4 b^4} = a^2 b^2$ .

б)  $\sqrt{b^6 c^8} = \sqrt{(b^3)^2} \cdot \sqrt{(c^4)^2} = |b^3| \cdot |c^4|$ .

По условию  $b \geq 0$ , значит,  $|b^3| = b^3$ ;  $c^4 \geq 0$  при любом  $c$ , значит,  $|c^4| = c^4$ . Имеем:  $\sqrt{b^6 c^8} = b^3 c^4$ .

г)  $\sqrt{0,25 p^2 y^6} = \sqrt{0,25} \cdot \sqrt{p^2} \cdot \sqrt{(y^3)^2} = 0,5|p| \cdot |y^3|$ .

По условию  $p \geq 0$ , поэтому  $|p| = p$ ;  $y \leq 0$ , поэтому  $|y^3| = -y^3$ .  
Имеем:  $\sqrt{0,25 p^2 y^6} = -0,5 p y^3$ .

$$\text{ж) } \sqrt{\frac{4x^2}{y^6}} = \frac{\sqrt{4x^2}}{\sqrt{y^6}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{x^2}}{\sqrt{(y^3)^2}} = \frac{2 \cdot |x|}{|y^3|}.$$

По условию  $x < 0$ , поэтому  $|x| = -x$ ;  $y < 0$ , поэтому  $|y^3| = -y^3$ .

$$\text{Имеем: } \sqrt{\frac{4x^2}{y^6}} = \frac{2 \cdot (-x)}{-y^3} = \frac{2x}{y^3}.$$

2-я группа. Задания повышенного уровня сложности:

– Упростите выражение:

$$\text{а) } \sqrt{(9 - \sqrt{15})^2} + 4 + \sqrt{15}; \quad \text{б) } \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} + \sqrt{5} + 7;$$

$$\text{в) } \sqrt{(3 - 2\sqrt{3})^2} - 2 - 2\sqrt{3}.$$

**№ 397.**

$$\sqrt{a^2 - 4a + 4} = \sqrt{(a - 2)^2} = |a - 2|.$$

Если  $0 \leq a < 2$ , то  $a - 2 < 0$ , то есть  $|a - 2| = 2 - a$ .

Если  $a \geq 2$ , то  $a - 2 \geq 0$ , то есть  $|a - 2| = a - 2$ .

**№ 400.**

$$\text{а) } \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{7 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = |2 + \sqrt{3}| = 2 + \sqrt{3};$$

$$\text{б) } \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{6 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{5}} = \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} = |1 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 1.$$

**№ 485.**

$$\text{а) } y = \frac{\sqrt{x^2}}{x}.$$

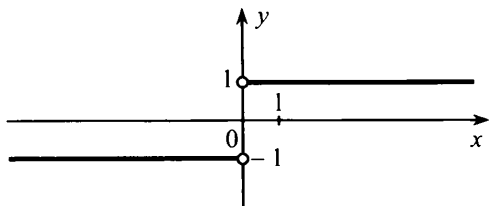
Преобразовав выражение  $\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ , получим функцию  $y = \frac{|x|}{x}$ .

Для построения её графика нужно раскрыть знак модуля, рассмотрев два случая:

$$1) \text{ если } x > 0, \text{ то } y = \frac{x}{x}, \text{ то есть } y = 1;$$

$$2) \text{ если } x < 0, \text{ то } y = \frac{-x}{x}, \text{ то есть } y = -1.$$

Получим такой график:

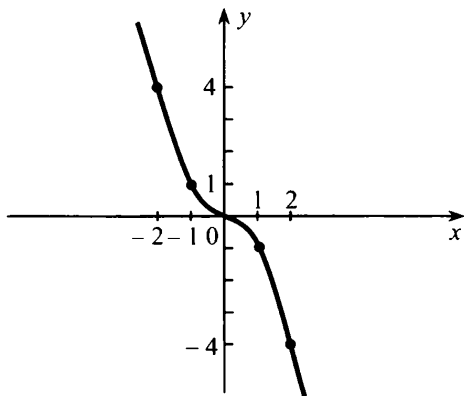


$$\text{г) } y = -x\sqrt{x^2}$$

$$y = -x \cdot |x|.$$

1) если  $x \geq 0$ , то  $y = -x^2$ ;

2) если  $x < 0$ , то  $y = x^2$ .



#### № 488.

Преобразуем выражение, стоящее под корнем. Сначала перемножим первый множитель с четвёртым, а второй – с третьим.

$$\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1} = \sqrt{(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1}.$$

Сделаем замену:  $n^2 + 3n = m$ . Получим:

$$\begin{aligned} \sqrt{(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1} &= \sqrt{m(m+2)+1} = \sqrt{m^2+2m+1} = \\ &= \sqrt{(m+1)^2} = |m+1|. \end{aligned}$$

Если  $n$  – натуральное число, то выражение  $n^2 + 3n$  принимает натуральные значения, то есть число  $m$  – натуральное. Это значит, что  $|m+1| = m+1$  и это выражение принимает всегда натуральные значения.

#### IV. Проверочная работа.

##### Вариант 1

1. Вычислите:

а)  $\sqrt{(3,8)^2}$ ;

в)  $-0,4\sqrt{22^2}$ ;

д)  $\sqrt{(-2)^8}$ ;

б)  $\sqrt{\left(-\frac{1}{7}\right)^2}$ ;

г)  $\sqrt{5^4}$ ;

е)  $\sqrt{3^4 \cdot 6^2}$ .

2. Упростите выражение:

а)  $\sqrt{m^2}$ , если  $m > 0$ ;

в)  $-3\sqrt{\frac{1}{9}n^2}$ , если  $n < 0$ ;

б)  $2\sqrt{c^2}$ , если  $c < 0$ ;

г)  $2,3\sqrt{100x^{12}}$ .

3.\* Вычислите:

$$\sqrt{21+8\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1.$$

### В а р и а н т 2

1. Вычислите:

а)  $\sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2}$ ;

в)  $-0,3\sqrt{33^2}$ ;

д)  $\sqrt{(-3)^4}$ ;

б)  $\sqrt{(-1,9)^2}$ ;

г)  $\sqrt{2^{10}}$ ;

е)  $\sqrt{2^6 \cdot 7^2}$ .

2. Упростите выражение:

а)  $\sqrt{p^2}$ , если  $p < 0$ ;

в)  $-2\sqrt{0,25c^2}$ , если  $c < 0$ ;

б)  $-3\sqrt{x^2}$ , если  $x > 0$ ;

г)  $4\sqrt{\frac{1}{16}a^8}$ .

3.\* Вычислите:

$$\sqrt{11+4\sqrt{7}} - 1 - \sqrt{7}.$$

### V. Итоги урока.

– Чему равно выражение  $\sqrt{x^2}$ , если  $x > 0$ ?  $x < 0$ ?

– При каких значениях  $a$  верно равенство  $\sqrt{a^{10}} = a^5$ ?

$$\sqrt{a^6} = -a^3?$$

– Может ли выражение  $\sqrt{a^4}$  принимать отрицательные значения? Почему?

– Какие значения может принимать выражение  $\sqrt{y^{14}}$ ?

**Домашнее задание:** № 396 (в, е, з), 487 (в, д, е, з);

№ 398, 485 (б, в) (дополнительно).



## Урок 38

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 3

#### Вариант 1

1. Вычислите:

а)  $0,5\sqrt{0,04} + \frac{1}{6}\sqrt{144}$ ;      б)  $2\sqrt{1\frac{9}{16}} - 1$ ;      в)  $(2\sqrt{0,5})^2$ .

2. Найдите значение выражения:

а)  $\sqrt{0,25 \cdot 64}$ ;      б)  $\sqrt{56} \cdot \sqrt{14}$ ;

в)  $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ ;      г)  $\sqrt{3^4 \cdot 2^6}$ .

3. Решите уравнение: а)  $x^2 = 0,49$ ;      б)  $x^2 = 10$ .

4. Упростите выражение:

а)  $x^2 \sqrt{9x^2}$ , где  $x \geq 0$ ;      б)  $-5b^2 \sqrt{\frac{4}{b^2}}$ , где  $b < 0$ .

5. Укажите две последовательные десятичные дроби с одним знаком после запятой, между которыми заключено число  $\sqrt{17}$ .

6. При каких значениях переменной  $a$  имеет смысл выражение  $\frac{8}{\sqrt{a-4}}$ ?

#### Вариант 2

1. Вычислите:

а)  $\frac{1}{2}\sqrt{196} + 1,5\sqrt{0,36}$ ;      б)  $1,5 - 7\sqrt{\frac{25}{49}}$ ;      в)  $(2\sqrt{1,5})^2$ .

2. Найдите значение выражения:

а)  $\sqrt{0,36 \cdot 25}$ ;      б)  $\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}$ ;

в)  $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ ;      г)  $\sqrt{2^4 \cdot 5^2}$ .

3. Решите уравнение: а)  $x^2 = 0,64$ ;      б)  $x^2 = 17$ .

4. Упростите выражение:

а)  $y^3 \sqrt{4y^2}$ , где  $y \geq 0$ ;      б)  $7a\sqrt{\frac{16}{a^2}}$ , где  $a < 0$ .

5. Укажите две последовательные десятичные дроби с одним знаком после запятой, между которыми заключено число  $\sqrt{38}$ .

6. При каких значениях переменной  $x$  имеет смысл выражение  $\frac{2}{\sqrt{x}-5}$ ?

### Вариант 3

1. Вычислите:

а)  $0,8\sqrt{225} - 0,5\sqrt{1,21}$ ;    б)  $2 - 3\sqrt{\frac{25}{36}}$ ;    в)  $(0,5\sqrt{20})^2$ .

2. Найдите значение выражения:

а)  $\sqrt{9 \cdot 1,44}$ ;    б)  $\sqrt{150} \cdot \sqrt{24}$ ;

в)  $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ ;    г)  $\sqrt{6^2 \cdot 3^4}$ .

3. Решите уравнение: а)  $x^2 = 0,81$ ;    б)  $x^2 = 46$ .

4. Упростите выражение:

а)  $\frac{1}{3}b^3\sqrt{9b^2}$ , где  $b \leq 0$ ;    б)  $2x^2\sqrt{\frac{49}{x^2}}$ , где  $x > 0$ .

5. Укажите две последовательные десятичные дроби с одним знаком после запятой, между которыми заключено число  $\sqrt{28}$ .

6. При каких значениях переменной  $x$  имеет смысл выражение  $\frac{10}{\sqrt{x}-2}$ ?

### Вариант 4

1. Вычислите:

а)  $\frac{1}{6}\sqrt{144} + \frac{1}{3}\sqrt{0,81}$ ;    б)  $2,1 + 1,3\sqrt{\frac{81}{169}}$ ;    в)  $(0,4\sqrt{5})^2$ .

2. Найдите значение выражения:

а)  $\sqrt{225 \cdot 0,04}$ ;    б)  $\sqrt{28} \cdot \sqrt{63}$ ;

в)  $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ ;    г)  $\sqrt{2^6 \cdot 7^2}$ .

3. Решите уравнение: а)  $x^2 = 0,09$ ;    б)  $x^2 = 92$ .

4. Упростите выражение:

а)  $\frac{1}{7}x^2\sqrt{49x^6}$ , где  $x \geq 0$ ;      б)  $-5y^6\sqrt{\frac{1}{81y^{10}}}$ , где  $y < 0$ .

5. Укажите две последовательные десятичные дроби с одним знаком после запятой, между которыми заключено число  $\sqrt{56}$ .

6. При каких значениях переменной  $y$  имеет смысл выражение  $\frac{2}{\sqrt{y+3}}$ ?

### РЕШЕНИЕ ВАРИАНТОВ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

#### Вариант 1

1. а)  $0,5\sqrt{0,04} + \frac{1}{6}\sqrt{144} = 0,5 \cdot 0,2 + \frac{1}{6} \cdot 12 = 0,1 + 2 = 2,1$ ;

б)  $2\sqrt{1\frac{9}{16}} - 1 = 2\sqrt{\frac{25}{16}} - 1 = 2 \cdot \frac{5}{4} - 1 = \frac{5}{2} - 1 = 1,5$ ;

в)  $(2\sqrt{0,5})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{0,5})^2 = 4 \cdot 0,5 = 2$ .

2. а)  $\sqrt{0,25 \cdot 64} = \sqrt{0,25} \cdot \sqrt{64} = 0,5 \cdot 8 = 4$ ;

б)  $\sqrt{56} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{56 \cdot 14} = \sqrt{4 \cdot 14 \cdot 14} = \sqrt{4 \cdot 14^2} = 2 \cdot 14 = 28$ ;

в)  $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$ ;

г)  $\sqrt{3^4 \cdot 2^6} = \sqrt{(3^2)^2 \cdot (2^3)^2} = 9 \cdot 8 = 72$ .

3. а)  $x^2 = 0,49$

$x = \pm 0,7$ ;

б)  $x^2 = 10$

$x = \pm\sqrt{10}$ .

4. а)  $x^2\sqrt{9x^2} = x^2 \cdot 3|x|$ .

Так как  $x \geq 0$ , то  $|x| = x$ . Получим:  $x^2\sqrt{9x^2} = x^2 \cdot 3x = 3x^3$ .

б)  $-5b^2\sqrt{\frac{4}{b^2}} = -5b^2 \cdot \frac{2}{|b|}$ .

Так как  $b < 0$ , то  $|b| = -b$ . Получим:  $-5b^2\sqrt{\frac{4}{b^2}} = -5b^2 \cdot \frac{2}{-b} = 10b$ .

$$5. 4,1 < \sqrt{17} < 4,2.$$

6. Чтобы выражение  $\frac{8}{\sqrt{a}-4}$  имело смысл, должны выполняться два условия:

$$1) a \geq 0;$$

$$2) \sqrt{a} - 4 \neq 0$$

$$\sqrt{a} \neq 4$$

$$a \neq 16.$$

Ответ:  $a \geq 0$  и  $a \neq 16$ .

### Вариант 2

$$1. \text{ а) } \frac{1}{2}\sqrt{196} + 1,5\sqrt{0,36} = \frac{1}{2} \cdot 14 + 1,5 \cdot 0,6 = 7 + 0,9 = 7,9;$$

$$\text{б) } 1,5 - 7\sqrt{\frac{25}{49}} = 1,5 - 7 \cdot \frac{5}{7} = 1,5 - 5 = -3,5;$$

$$\text{в) } (2\sqrt{1,5})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{1,5})^2 = 4 \cdot 1,5 = 6.$$

$$2. \text{ а) } \sqrt{0,36 \cdot 25} = \sqrt{0,36} \cdot \sqrt{25} = 0,6 \cdot 5 = 3;$$

$$\text{б) } \sqrt{8} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{8 \cdot 18} = \sqrt{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12;$$

$$\text{в) } \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3;$$

$$\text{г) } \sqrt{2^4 \cdot 5^2} = \sqrt{(2^2)^2 \cdot 5^2} = 4 \cdot 5 = 20.$$

$$3. \text{ а) } x^2 = 0,64$$

$$x = \pm 0,8.$$

$$\text{б) } x^2 = 17$$

$$x = \pm\sqrt{17}.$$

$$4. \text{ а) } y^3 \sqrt{4y^2} = y^3 \cdot 2|y|$$

Так как  $y \geq 0$ , то  $|y| = y$ . Получим:  $y^3 \sqrt{4y^2} = y^3 \cdot 2y = 2y^4$ .

$$\text{б) } 7a\sqrt{\frac{16}{a^2}} = 7a \cdot \frac{4}{|a|}.$$

Так как  $a < 0$ , то  $|a| = -a$ . Получим:  $7a\sqrt{\frac{16}{a^2}} = 7a \cdot \frac{4}{-a} = -28$ .

5.  $6,1 < \sqrt{38} < 6,2$ .

6. Чтобы выражение  $\frac{2}{\sqrt{x}-5}$  имело смысл, должны выполняться два условия:

1)  $x \geq 0$

2)  $\sqrt{x} - 5 \neq 0$

$\sqrt{x} \neq 5$

$x \neq 25$ .

Ответ:  $x \geq 0$  и  $x \neq 25$ .

### Вариант 3

1. а)  $0,8\sqrt{225} - 0,5\sqrt{1,21} = 0,8 \cdot 15 - 0,5 \cdot 1,1 = 12 - 0,55 = 11,45$ ;

б)  $2 - 3\sqrt{\frac{25}{36}} = 2 - 3 \cdot \frac{5}{6} = 2 - \frac{5}{2} = -0,5$ ;

в)  $(0,5\sqrt{20})^2 = 0,5^2 \cdot (\sqrt{20})^2 = 0,25 \cdot 20 = 5$ .

2. а)  $\sqrt{9 \cdot 1,44} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{1,44} = 3 \cdot 1,2 = 3,6$ ;

б)  $\sqrt{150} \cdot \sqrt{24} = \sqrt{150 \cdot 24} = \sqrt{25 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 5 \cdot 6 \cdot 2 = 60$ ;

в)  $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$ ;

г)  $\sqrt{6^2 \cdot 3^4} = \sqrt{6^2} \cdot \sqrt{(3^2)^2} = 6 \cdot 9 = 54$ .

3. а)  $x^2 = 0,81$

б)  $x^2 = 46$

$x = \pm 0,9$ .

$x = \pm\sqrt{46}$ .

4. а)  $\frac{1}{3}b^3\sqrt{9b^2} = \frac{1}{3}b^3 \cdot 3|b| = b^3 \cdot |b|$ .

Так как  $b \leq 0$ , то  $|b| = -b$ . Получим:  $\frac{1}{3}b^3\sqrt{9b^2} = b^3 \cdot (-b) = -b^4$ .

б)  $2x^2\sqrt{\frac{49}{x^2}} = 2x^2 \cdot \frac{7}{|x|}$ .

Так как  $x > 0$ , то  $|x| = x$ . Получим:  $2x^2\sqrt{\frac{49}{x^2}} = 2x^2 \cdot \frac{7}{x} = 14x$ .

5.  $5,2 < \sqrt{28} < 5,3$ .

6. Чтобы выражение  $\frac{10}{\sqrt{x}-2}$  имело смысл, должны выпол-

таться два условия:

1)  $x \geq 0$ ;

2)  $\sqrt{x} - 2 \neq 0$

$\sqrt{x} \neq 2$

$x \neq 4$ .

Ответ:  $x \geq 0$  и  $x \neq 4$ .

### Вариант 4

1. а)  $\frac{1}{6}\sqrt{144} + \frac{1}{3}\sqrt{0,81} = \frac{1}{6} \cdot 12 + \frac{1}{3} \cdot 0,9 = 2 + 0,3 = 2,3$ ;

б)  $2,1 + 1,3\sqrt{\frac{81}{169}} = 2,1 + 1,3 \cdot \frac{9}{13} = 2,1 + 0,9 = 3$ ;

в)  $(0,4\sqrt{5})^2 = 0,4^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 0,16 \cdot 5 = 0,8$ .

2. а)  $\sqrt{225 \cdot 0,04} = \sqrt{225} \cdot \sqrt{0,04} = 15 \cdot 0,2 = 3$ ;

б)  $\sqrt{28} \cdot \sqrt{63} = \sqrt{28 \cdot 63} = \sqrt{4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9} = 2 \cdot 7 \cdot 3 = 42$ ;

в)  $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$ ;

г)  $\sqrt{2^6 \cdot 7^2} = \sqrt{(2^3)^2 \cdot 7^2} = 8 \cdot 7 = 56$ .

3. а)  $x^2 = 0,09$

б)  $x^2 = 92$

$x = \pm 0,3$ ;

$x = \pm \sqrt{92}$ .

4. а)  $\frac{1}{7}x^2\sqrt{49x^6} = \frac{1}{7}x^2 \cdot 7|x^3| = x^2 \cdot |x^3|$ .

Так как  $x \geq 0$ , то  $|x^3| = x^3$ . Получим:  $\frac{1}{7}x^2\sqrt{49x^6} = x^2 \cdot x^3 = x^5$ .

б)  $-5y^6\sqrt{\frac{1}{81y^{10}}} = -5y^6 \cdot \frac{1}{9|y^5|}$ .

Так как  $y < 0$ , то  $|y^5| = -y^5$ .

Получим:  $-5y^6\sqrt{\frac{1}{81y^{10}}} = -5y^6 \cdot \frac{1}{-9y^5} = \frac{5y}{9}$ .

5.  $7,4 < \sqrt{56} < 7,5$ .

6. Чтобы выражение  $\frac{2}{\sqrt{y}+3}$  имело смысл, должны выпол-

няться два условия:

1)  $y \geq 0$ ;

2)  $\sqrt{y} + 3 \neq 0$

$y$  – любое.

Ответ:  $y \geq 0$ .

## Урок 39

### ВЫНЕСЕНИЕ МНОЖИТЕЛЯ ЗА ЗНАК КОРНЯ. ВНЕСЕНИЕ МНОЖИТЕЛЯ ПОД ЗНАК КОРНЯ

**Цели:** изучить такие преобразования квадратных корней, как вынесение множителя за знак корня и внесение множителя под знак корня; формировать умение выполнять эти преобразования.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

Вычислите:

а)  $\sqrt{9 \cdot 49}$ ;      в)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$ ;      д)  $\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{27}$ ;      ж)  $\sqrt{81 \cdot 0,09}$ ;

б)  $\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{25}}$ ;      г)  $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2}$ ;      е)  $\sqrt{0,16 \cdot 36}$ ;      з)  $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ .

#### III. Объяснение нового материала по учебнику.

Объяснению материала следует придать больше проблемности и требовать от учащихся самостоятельности при формулировании выводов.

1. Поставить проблему: как сравнить значения выражений  $\sqrt{50}$  и  $6\sqrt{2}$ .

2. Рассмотреть два способа, которые могут быть использованы для этого.

3. Сделать выводы.

– Какое действие нужно было выполнить при решении задачи первым способом? (Такое преобразование называется *вынесением множителя из-под знака корня*.)

Аналогично анализируем действие, выполняемое при решении задачи вторым способом. Это преобразование называется *внесением множителя под знак корня*.

– В каких случаях пригодится умение выносить множитель из-под знака корня и вносить множитель под знак корня?

Выделите две основные ситуации, в которых применяются данные умения:

- 1) Сравнение двух выражений.
- 2) Преобразование выражений.

#### **IV. Формирование умений и навыков.**

Задания можно разбить на три группы:

1-я группа. Вынесение множителя за знак корня: № 407, 408.

Не все учащиеся могут быстро раскладывать подкоренные выражения на два «удобных» множителя. Некоторые подбирают «очевидные» делители, например 4 или 9. В этом случае не нужно требовать от учащихся, чтобы они отыскивали другое разложение, главное – получение верного результата.

$$\text{Например, } \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Этот же результат можно получить по-другому:

$$\sqrt{48} = \sqrt{4 \cdot 12} = 2\sqrt{12} = 2\sqrt{4 \cdot 3} = 4\sqrt{3}.$$

2-я группа. Внесение множителя под знак корня: № 410, 412.

При выполнении задания № 412 учащиеся могут допустить довольно распространённую ошибку: внести под корень отрицательный множитель:

$$-10\sqrt{0,02} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{0,02} = \sqrt{100 \cdot 0,02} = \sqrt{2}.$$

В этом случае нужно предложить учащимся сравнить с нулем данное и полученное число. Данное число является отрицательным, а после внесения множителя под корень получили положительное число. Учащиеся должны найти ошибку в рассуждениях и сделать вывод.



3-я группа. Сравнение значений выражений с корнями:  
№ 411, 414, 416, 417.

### № 411.

Из данных четырех выражений не имеет смысла то, которое содержит под корнем отрицательное число. Таким образом, нужно сравнить с нулем все подкоренные выражения. А для этого нужно сравнить уменьшаемое и вычитаемое.

1)  $\sqrt{2\sqrt{17}-4}$  имеет смысл, так как  $2\sqrt{17} > 4$ .

2)  $\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{7}}$  имеет смысл, так как  $2\sqrt{2} > \sqrt{7}$ .

3)  $\sqrt{6\sqrt{3}-7\sqrt{2}}$  имеет смысл, так как  $6\sqrt{3} > 7\sqrt{2}$ .

4)  $\sqrt{8\sqrt{3}-14}$  не имеет смысла, так как  $8\sqrt{3} < 14$ .

### V. Итоги урока.

– В чем состоит прием вынесения множителя из-под знака корня; внесения множителя под знак корня?

– Как сравнить значения выражений, содержащих корни?

– Как сравнить корень с целым числом?

Домашнее задание: № 409, 413, 415.

## Урок 40

### ПРИВЕДЕНИЕ ПОДОБНЫХ РАДИКАЛОВ И ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ВЫРАЖЕНИЙ С КОРНЯМИ

**Цель:** формировать умения выделять и приводить подобные радикалы, преобразовывать выражения, содержащие корни, с использованием формул сокращённого умножения.

### Ход урока

I. Организационный момент.

II. Проверочная работа.

#### Вариант 1

1. Вынесите множитель из-под знака корня:

а)  $2\sqrt{12}$ ;                      б)  $\frac{1}{5}\sqrt{200}$ ;                      в)  $\frac{\sqrt{44}}{2}$ .

2. Внесите множитель под знак корня:

а)  $\frac{1}{2}\sqrt{20}$ ;                      б)  $6\sqrt{2}$ ;                      в)  $-\frac{2}{3}\sqrt{45}$ .

3. Сравните значения выражений:

а)  $2\sqrt{5}$  и  $3\sqrt{2}$ ;                      б)  $\sqrt{24}$  и  $\frac{1}{3}\sqrt{216}$ .

### В а р и а н т 2

1. Вынесите множитель из-под знака корня:

а)  $3\sqrt{28}$ ;                      б)  $\frac{1}{2}\sqrt{80}$ ;                      в)  $\frac{\sqrt{500}}{5}$ .

2. Внесите множитель под знак корня:

а)  $2\sqrt{7}$ ;                      б)  $3\sqrt{\frac{1}{3}}$ ;                      в)  $-\frac{4}{5}\sqrt{75}$ .

3. Сравните значения выражений:

а)  $3\sqrt{3}$  и  $2\sqrt{7}$ ;                      б)  $\frac{2}{3}\sqrt{72}$  и  $7\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

### III. Объяснение нового материала.

Вспомните все свойства квадратных корней и все виды преобразований выражений с корнями, которые вы уже умеете выполнять.

Рассмотрим несколько примеров, отражающих другие виды преобразований: приведение подобных радикалов и применение формул сокращённого умножения.

Пр и м е р 1 (пример из учебника).

Пр и м е р 2. Преобразуйте выражение:

а)  $(\sqrt{5} + 3)(2\sqrt{5} - 3) = (2\sqrt{5})^2 - 3^2 = 20 - 9 = 11$ ;

б)  $(2 - \sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} = 4 - 4\sqrt{3} + 3 + 4\sqrt{3} = 7$ .

### IV. Формирование умений и навыков.

Вам уже известно понятие «подобные слагаемые».

На этом уроке введем понятие «подобные радикалы» и сформируем умение упрощать соответствующие выражения.

- Все задания можно разбить на две группы:

1-я группа. Выделение и приведение подобных радикалов:  
№ 421, 422 (а, в).

– Приведите подобные слагаемые.

а)  $5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} - \sqrt{5}$ ;

в)  $5\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - \sqrt{x} - \frac{1}{2}x$ ;

б)  $\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + \sqrt{7}$ ;

г)  $6\sqrt{a} + \sqrt{a} + 4\sqrt{n} - 7\sqrt{n}$ .

2-я группа. Преобразование выражений, содержащих корни, с использованием формул сокращенного умножения: № 423, 426, 425.

№ 425.

а) 
$$\left(\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2 = \left(\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2 + 2\sqrt{4+\sqrt{7}} \cdot \sqrt{4-\sqrt{7}} + \left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2 = 4 + \sqrt{7} + 2\sqrt{4^2 - (\sqrt{7})^2} + 4 - \sqrt{7} = 8 + 2\sqrt{9} = 8 + 6 = 14.$$

б) 
$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2 = \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2 - 2\sqrt{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})} + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2 = 5 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{5^2 - (2\sqrt{6})^2} + 5 - 2\sqrt{6} = 10 - 2\sqrt{1} = 8.$$

• Задания на карточках для сильных учащихся.

### Карточка 1

1. Упростите выражение:

а)  $(2\sqrt{x} + \sqrt{y})(3\sqrt{x} - 2\sqrt{y})$ ;

б)  $(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a} + a)$ ;

в)  $\frac{\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{30}}}{5} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{30} - \sqrt{5}}}{5}$ .

2. Докажите, что

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = 2.$$

3. Выберите выражение, равное  $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$ :

А.  $\sqrt{7} - 3$ ;

Б.  $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ ;

В.  $3 - \sqrt{7}$ .

## Карточка 2

1. Упростите выражение:

а)  $(4\sqrt{a} - \sqrt{2a})(\sqrt{a} - \sqrt{2a})$ ;      б)  $(\sqrt{x} + 2)(x - 2\sqrt{x} + 4)$ ;

в)  $\frac{\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{15}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{15} - \sqrt{3}}}{2}$ .

2. Докажите, что

$$\sqrt{33} \cdot \sqrt{6 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{3} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{3} - \sqrt{3}} = 33.$$

3. Выберите выражение, равное  $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$ :

А.  $\sqrt{6} - 2$ ;      Б.  $\sqrt{2} - \sqrt{6}$ ;      В.  $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ .

Решение заданий карточки 1

1. а)  $(2\sqrt{x} + \sqrt{y})(3\sqrt{x} - 2\sqrt{y}) = 6x - 4\sqrt{xy} + 3\sqrt{xy} - 2y =$   
 $= 6x - 2y - \sqrt{xy}$ ;

б)  $(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a} + a) = 1^3 - (\sqrt{a})^3 = 1 - \sqrt{a^3}$ ;

в)  $\frac{\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{30}}}{5} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{30} - \sqrt{5}}}{5} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{30}) \cdot (\sqrt{30} - \sqrt{5})}}{25} =$   
 $= \frac{\sqrt{(\sqrt{30})^2 - (\sqrt{5})^2}}{25} = \frac{\sqrt{30 - 5}}{25} = \frac{\sqrt{25}}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ .

2.  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} =$   
 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) \cdot (2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})} =$   
 $= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{4 - 2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} =$   
 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$

3. Выражение А является отрицательным, поэтому его можно не проверять. Возведём выражения Б и В в квадрат.

$$(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2 = 7 - 2\sqrt{21} + 3 = 10 - 2\sqrt{21};$$

$$(3 - \sqrt{7})^2 = 9 - 6\sqrt{7} + 7 = 16 - 6\sqrt{7}.$$

Ответ: В.

## У. Итоги урока.

– Какие существуют виды преобразований квадратных корней?

– Как привести подобные радикалы?

– Рациональным или иррациональным является выражение вида  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ ?

Домашнее задание: № 422 (б, г, д, е), 424, 496 (дополнительно).

## Урок 41

### СОКРАЩЕНИЕ ДРОБЕЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЕ КОРНИ, И ОСВОБОЖДЕНИЕ ОТ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ В ЗНАМЕНАТЕЛЕ ДРОБИ

Цель: продолжить формирование умения преобразовывать выражения, содержащие квадратные корни.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

Приведите подобные радикалы:

а)  $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$ ;

д)  $\sqrt{7} - \frac{1}{2}\sqrt{7}$ ;

б)  $7\sqrt{\frac{1}{2}} - 5\sqrt{\frac{1}{2}}$ ;

е)  $\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{5}$ ;

в)  $6\sqrt{2} + 17\sqrt{2}$ ;

ж)  $2\sqrt{11} + 11\sqrt{11} - 3\sqrt{11}$ ;

г)  $9\sqrt{0,1} - 3\sqrt{0,1}$ ;

з)  $5\sqrt{\frac{3}{7}} - 2\sqrt{\frac{3}{7}}$ .

#### III. Формирование умений и навыков.

• Задания можно разбить на две группы:

1-я группа. Сокращение дробей, содержащих квадратные корни: № 427, 428, 429.

2-я группа. Освобождение от иррациональности в знаменателе дроби: № 431, 433 (а, в, д).

№ 433.

$$\text{а) } \frac{4}{\sqrt{3}+1} = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{2} = 2\sqrt{3}-2;$$

$$\text{в) } \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y};$$

$$\begin{aligned} \text{д) } \frac{33}{7-3\sqrt{3}} &= \frac{33(7+3\sqrt{3})}{(7-3\sqrt{3})(7+3\sqrt{3})} = \frac{33(7+3\sqrt{3})}{7^2-(3\sqrt{3})^2} = \\ &= \frac{33(7+3\sqrt{3})}{22} = \frac{3(7+3\sqrt{3})}{2} = \frac{21+9\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

• Дополнительные задания для учащихся с высоким уровнем подготовки.

1) Сократите дробь:

$$\frac{3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}.$$

Решение

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}} &= \frac{3\sqrt{4 \cdot 2}-2\sqrt{4 \cdot 3}+\sqrt{4 \cdot 5}}{3\sqrt{9 \cdot 2}-2\sqrt{9 \cdot 3}+\sqrt{9 \cdot 5}} = \\ &= \frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{9\sqrt{2}-6\sqrt{3}+3\sqrt{5}} = \frac{2(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2) Вычислите:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

Решение

$$\begin{aligned} &\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = \\ &= \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \\ &= \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2^2 - (2+\sqrt{3})} = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{4-3} = 1. \end{aligned}$$

3) Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

$$\frac{1}{1 + \sqrt{5} - \sqrt{6}}.$$

Решение

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \sqrt{5} - \sqrt{6}} &= \frac{1 + \sqrt{5} + \sqrt{6}}{\left( (1 + \sqrt{5}) - \sqrt{6} \right) \left( (1 + \sqrt{5}) + \sqrt{6} \right)} = \\ &= \frac{1 + \sqrt{5} + \sqrt{6}}{(1 + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{6})^2} = \frac{1 + \sqrt{5} + \sqrt{6}}{6 + 2\sqrt{5} - 6} = \frac{1 + \sqrt{5} + \sqrt{6}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} + 5 + \sqrt{30}}{10}. \end{aligned}$$

#### IV. Проверочная работа.

##### Вариант 1

1. Упростите выражение:

а)  $\sqrt{4x} + \sqrt{64x} - \sqrt{81x}$ ;

б)  $\sqrt{12y} - 0,5\sqrt{48y} + 2\sqrt{108y}$ ;

в)  $(5\sqrt{7} - \sqrt{63} + \sqrt{14}) \cdot \sqrt{7}$ .

2. Выполните действия:

а)  $(2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})$ ;

б)  $(\sqrt{14} + 2)(2 - \sqrt{14})$ ;

в)  $(1 - 2\sqrt{3})^2$ .

3. Сократите дробь:

а)  $\frac{5 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ ;

б)  $\frac{a^2 - 3}{a + \sqrt{3}}$ .

4. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а)  $\frac{6}{5\sqrt{3}}$ ;

б)  $\frac{3}{\sqrt{11} - \sqrt{2}}$ .

##### Вариант 2

1. Упростите выражение:

а)  $\sqrt{49c} - \sqrt{16c} + \sqrt{25c}$ ;

б)  $\sqrt{8m} - 0,2\sqrt{200m} + 3\sqrt{72m}$ ;

в)  $(7\sqrt{2} - \sqrt{98} + \sqrt{10}) \cdot \sqrt{2}$ .

2. Выполните действия:

а)  $(1 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$ ;

б)  $(3 + \sqrt{15})(\sqrt{15} - 3)$ ;

в)  $(1 + 3\sqrt{2})^2$ .

3. Сократите дробь:

а)  $\frac{7 + \sqrt{7}}{3\sqrt{7}}$ ;

б)  $\frac{c^2 - 2}{c - \sqrt{2}}$ .

4. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а)  $\frac{12}{7\sqrt{6}}$ ;

б)  $\frac{5}{\sqrt{13} + \sqrt{3}}$ .

### V. Итоги урока.

– Как приводить подобные радикалы?

– Как освобождаться от иррациональности в знаменателе дроби в различных случаях?

**Домашнее задание:** № 430, 432, 433 (б, г, е),

№ 503 (а, д), 507 (а) (дополнительно).

## Урок 42

### РЕШЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

**Цель:** закрепить знания и умения учащихся по преобразованию выражений, содержащих квадратные корни.

### Ход урока

**I. Организационный момент.**

**II. Устная работа.**

Приведите подобные слагаемые:

а)  $3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$ ;

д)  $\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ ;

б)  $4\sqrt{\frac{1}{3}} - 3\sqrt{\frac{1}{3}}$ ;

е)  $2\sqrt{x} - 6\sqrt{x} - 3\sqrt{x}$ ;

в)  $5\sqrt{1,2} + 11\sqrt{1,2}$ ;

ж)  $\sqrt{n} - \frac{1}{3}\sqrt{n}$ ;

г)  $7\sqrt{a} - 12\sqrt{a} - \sqrt{a}$ ;

з)  $\sqrt{x} - 5\sqrt{x} + 2\sqrt{y} - 3\sqrt{y}$ .



### III. Формирование умений и навыков.

• Все задания можно разбить на две группы.

1-я группа. Более сложные, чем на предыдущем уроке, задания на преобразование выражений, содержащих квадратные корни: № 436 (а, в, д), 437, 435 (а, в), 434, 438.

#### № 434.

а) Преобразуем данное выражение:

$$\frac{1}{3\sqrt{3}-4} - \frac{1}{3\sqrt{3}+4} = \frac{3\sqrt{3}+4-3\sqrt{3}+4}{(3\sqrt{3}-4)(3\sqrt{3}+4)} = \frac{8}{27-16} = \frac{8}{11}.$$

Таким образом, значение выражения является рациональным числом.

$$\text{б) } \frac{1}{5-2\sqrt{6}} - \frac{1}{5+2\sqrt{6}} = \frac{5+2\sqrt{6}-5+2\sqrt{6}}{(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})} = \frac{4\sqrt{6}}{25-24} = 4\sqrt{6}.$$

Таким образом, значение выражения является иррациональным числом.

#### № 438.

Известно, что взаимно обратные числа в произведении дают единицу, а противоположные числа в сумме дают ноль.

$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2=4-3=1$ , то есть данные числа являются взаимно обратными.

$$\begin{aligned} 2\sqrt{6}-5 + \frac{1}{2\sqrt{6}+5} &= \frac{(2\sqrt{6}-5)(2\sqrt{6}+5)+1}{2\sqrt{6}+5} = \frac{(2\sqrt{6})^2-5^2+1}{2\sqrt{6}+5} = \\ &= \frac{24-25+1}{2\sqrt{6}+5} = 0, \text{ то есть данные числа являются противополож-} \\ &\text{ными.} \end{aligned}$$

2-я группа. Задания повышенного уровня сложности на преобразование выражений, содержащих квадратные корни: № 508, 511.

#### № 508.

Сначала сократим данную дробь:

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}.$$

Так как выражение  $\sqrt{x} + \sqrt{2}$  положительно при любых  $x$ , то дробь  $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}$  принимает наибольшее значение, когда её знаменатель наименьший. Выражение  $\sqrt{x} + \sqrt{2}$  принимает наименьшее значение при  $x = 0$ .

Ответ: при  $x = 0$ .

**№ 511.**

$$\begin{aligned} \sqrt{b+49-14\sqrt{b}} + \sqrt{b+49+14\sqrt{b}} &= \sqrt{(\sqrt{b}-7)^2} + \sqrt{(\sqrt{b}+7)^2} = \\ &= |\sqrt{b}-7| + |\sqrt{b}+7|. \end{aligned}$$

Выражение  $\sqrt{b} + 7$  положительно при всех допустимых значениях  $b$ , поэтому  $|\sqrt{b} + 7| = \sqrt{b} + 7$ .

По условию  $0 \leq b \leq 49$ ; при таких значениях  $b$  выражение  $\sqrt{b} - 7$  меньше либо равно нулю, поэтому  $|\sqrt{b} - 7| = 7 - \sqrt{b}$ .

Таким образом, имеем:

$$\sqrt{b+49-14\sqrt{b}} + \sqrt{b+49+14\sqrt{b}} = 7 - \sqrt{b} + \sqrt{b} + 7 = 14,$$

то есть исходное выражение не зависит от  $b$ .

• **Дополнительное задание.** Докажите, что верно равенство:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1.$$

**Доказательство**

Освободимся от иррациональности в знаменателе каждой дроби:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \sqrt{2} - 1;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = \sqrt{3} - \sqrt{2};$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{(\sqrt{3}+\sqrt{4})(\sqrt{3}-\sqrt{4})} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4} = \sqrt{4} - \sqrt{3};$$

$$\frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4} - \sqrt{5}}{(\sqrt{4} + \sqrt{5})(\sqrt{4} - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{4} - \sqrt{5}}{4 - 5} = \sqrt{5} - \sqrt{4}.$$

Преобразуем левую часть исходного равенства, подставляя в него полученные выражения:

$$\sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{4} = \sqrt{5} - 1$$

$$\sqrt{5} - 1 = \sqrt{5} - 1.$$

Равенство доказано.

#### IV. Итоги урока.

– Что называется арифметическим квадратным корнем из числа  $a$ ?

– Сформулируйте все свойства арифметического квадратного корня.

– В чём состоит приём вынесения множителя из-под знака корня? внесения множителя под знак корня? Когда используются эти приёмы?

– Как освободиться от иррациональности в знаменателе дроби?

**Домашнее задание:** № 435 (б, г), № 436 (б, г, е), № 439, 506 (в, г) (дополнительно).

### Урок 43

#### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 4

##### Вариант 1

1. Упростите выражение:

а)  $10\sqrt{3} - 4\sqrt{48} - \sqrt{75}$ ; б)  $(5\sqrt{2} - \sqrt{18}) \cdot \sqrt{2}$ ; в)  $(3 - \sqrt{2})^2$ .

2. Сравните:  $7\sqrt{\frac{1}{7}}$  и  $\frac{1}{2}\sqrt{20}$ .

3. Сократите дробь:

а)  $\frac{6 + \sqrt{6}}{\sqrt{30} + \sqrt{5}}$ ;

б)  $\frac{9 - a}{3 + \sqrt{a}}$ .

4. Освободите дробь от знака корня в знаменателе:

а)  $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ ;

б)  $\frac{8}{\sqrt{7} - 1}$ .

5. Докажите, что значение выражения  $\frac{1}{2\sqrt{3}+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}-1}$  есть число рациональное.

6. При каких значениях  $a$  дробь  $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{5}}{a-5}$  принимает наибольшее значение?

### Вариант 2

1. Упростите выражение:

а)  $2\sqrt{2} + \sqrt{50} - \sqrt{98}$ ; б)  $(3\sqrt{5} - \sqrt{20}) \cdot \sqrt{5}$ ; в)  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ .

2. Сравните:  $\frac{1}{2}\sqrt{60}$  и  $10\sqrt{\frac{1}{5}}$ .

3. Сократите дробь:

а)  $\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$ ; б)  $\frac{b-4}{\sqrt{b}-2}$ .

4. Освободите дробь от знака корня в знаменателе:

а)  $\frac{2}{3\sqrt{7}}$ ; б)  $\frac{4}{\sqrt{11}+3}$ .

5. Докажите, что значение выражения  $\frac{1}{1-3\sqrt{5}} + \frac{1}{1+3\sqrt{5}}$  есть число рациональное.

6. При каких значениях  $x$  дробь  $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$  принимает наибольшее значение?

### Вариант 3

1. Упростите выражение:

а)  $6\sqrt{3} + \sqrt{27} - 3\sqrt{75}$ ; б)  $(\sqrt{50} - 2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}$ ; в)  $(2 - \sqrt{3})^2$ .

2. Сравните:  $\frac{1}{2}\sqrt{12}$  и  $\frac{1}{3}\sqrt{45}$ .

3. Сократите дробь:

а)  $\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{5}-\sqrt{15}}$ ; б)  $\frac{a-2\sqrt{a}}{3\sqrt{a}-6}$ .

4. Освободите дробь от знака корня в знаменателе:

а)  $\frac{5}{3\sqrt{10}}$ ;

б)  $\frac{8}{\sqrt{6+\sqrt{2}}}$ .

5. Докажите, что значение выражения  $\frac{1}{2\sqrt{7}-1} - \frac{1}{2\sqrt{7}+1}$  есть число рациональное.

6. При каких значениях  $x$  дробь  $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{x-7}$  принимает наибольшее значение?

### Вариант 4

1. Упростите выражение:

а)  $5\sqrt{2} + 2\sqrt{32} - \sqrt{98}$ ; б)  $(4\sqrt{3} + \sqrt{27}) \cdot \sqrt{3}$ ; в)  $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$ .

2. Сравните:  $\frac{1}{2}\sqrt{28}$  и  $\frac{1}{3}\sqrt{54}$ .

3. Сократите дробь:

а)  $\frac{\sqrt{10}+5}{2+\sqrt{10}}$ ;

б)  $\frac{x-3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-6}$ .

4. Освободите дробь от знака корня в знаменателе:

а)  $\frac{7}{2\sqrt{21}}$ ;

б)  $\frac{22}{\sqrt{13}-\sqrt{2}}$ .

5. Докажите, что значение выражения  $\frac{1}{3+\sqrt{15}} + \frac{1}{3-\sqrt{15}}$  есть число рациональное.

6. При каких значениях  $p$  дробь  $\frac{\sqrt{p}-1}{p-1}$  принимает наибольшее значение?

### РЕШЕНИЕ ВАРИАНТОВ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

#### Вариант 1

1. а)  $10\sqrt{3} - 4\sqrt{48} - \sqrt{75} = 10\sqrt{3} - 4\sqrt{16 \cdot 3} - \sqrt{25 \cdot 3} =$   
 $= 10\sqrt{3} - 16\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -11\sqrt{3}$ ;

$$\text{б) } (5\sqrt{2} - \sqrt{18}) \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot 2 - \sqrt{36} = \\ = 10 - 6 = 4;$$

$$\text{в) } (3 - \sqrt{2})^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 9 - 6\sqrt{2} + 2 = 11 - 6\sqrt{2}.$$

$$2. \quad 7\sqrt{\frac{1}{7}} = \sqrt{49 \cdot \frac{1}{7}} = \sqrt{7};$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 20} = \sqrt{5}.$$

Так как  $\sqrt{7} > \sqrt{5}$ , то  $7\sqrt{\frac{1}{7}} > \frac{1}{2}\sqrt{20}$ .

$$3. \text{ а) } \frac{6 + \sqrt{6}}{\sqrt{30} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{6} + 1)}{\sqrt{5}(\sqrt{6} + 1)} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6}{5}} = \sqrt{1,2};$$

$$\text{б) } \frac{9 - a}{3 + \sqrt{a}} = \frac{(3 - \sqrt{a})(3 + \sqrt{a})}{3 + \sqrt{a}} = 3 - \sqrt{a}.$$

$$4. \text{ а) } \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10};$$

$$\text{б) } \frac{8}{\sqrt{7} - 1} = \frac{8(\sqrt{7} + 1)}{(\sqrt{7} - 1)(\sqrt{7} + 1)} = \frac{8(\sqrt{7} + 1)}{(\sqrt{7})^2 - 1^2} = \frac{8(\sqrt{7} + 1)}{7 - 1} = \\ = \frac{8(\sqrt{7} + 1)}{6} = \frac{4(\sqrt{7} + 1)}{3} = \frac{4\sqrt{7} + 4}{3}.$$

$$5. \quad \frac{1}{2\sqrt{3} + 1} - \frac{1}{2\sqrt{3} - 1} = \frac{2\sqrt{3} - 1 - 2\sqrt{3} - 1}{(2\sqrt{3} + 1)(2\sqrt{3} - 1)} = \frac{-2}{(2\sqrt{3})^2 - 1^2} = \\ = \frac{-2}{12 - 1} = -\frac{2}{11}.$$

Значит, значение исходного выражения есть число рациональное.

$$6. \quad \frac{\sqrt{a} - \sqrt{5}}{a - 5} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{5}}{(\sqrt{a} - \sqrt{5})(\sqrt{a} + \sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{5}}.$$

Выражение  $\sqrt{a} + \sqrt{5}$  принимает положительные значения при всех допустимых значениях  $a$ .

Дробь  $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{5}}$  будет наибольшей, если её знаменатель – наименьший, а выражение  $\sqrt{a} + \sqrt{5}$  принимает наименьшее значение при  $a = 0$ .

Ответ: при  $a = 0$ .

### Вариант 2

$$1. \text{ а) } 2\sqrt{2} + \sqrt{50} - \sqrt{98} = 2\sqrt{2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{49 \cdot 2} = \\ = 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = 0;$$

$$\text{б) } (3\sqrt{5} - \sqrt{20}) \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot 5 - \sqrt{100} = \\ = 15 - 10 = 5;$$

$$\text{в) } (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = \\ = 5 + 2\sqrt{6}.$$

$$2. \frac{1}{2}\sqrt{60} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 60} = \sqrt{15};$$

$$10\sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{5}} = \sqrt{20}.$$

Так как  $\sqrt{15} < \sqrt{20}$ , то  $\frac{1}{2}\sqrt{60} < 10\sqrt{\frac{1}{5}}$ .

$$3. \text{ а) } \frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{2,5};$$

$$\text{б) } \frac{b - 4}{\sqrt{b} - 2} = \frac{(\sqrt{b} - 2)(\sqrt{b} + 2)}{\sqrt{b} - 2} = \sqrt{b} + 2.$$

$$4. \text{ а) } \frac{2}{3\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{21};$$

$$\text{б) } \frac{4}{\sqrt{11} + 3} = \frac{4(\sqrt{11} - 3)}{(\sqrt{11} + 3)(\sqrt{11} - 3)} = \frac{4(\sqrt{11} - 3)}{(\sqrt{11})^2 - 3^2} = \frac{4(\sqrt{11} - 3)}{11 - 9} = \\ = \frac{4(\sqrt{11} - 3)}{2} = 2(\sqrt{11} - 3) = 2\sqrt{11} - 6.$$

$$5. \frac{1}{1-3\sqrt{5}} + \frac{1}{1+3\sqrt{5}} = \frac{1+3\sqrt{5}+1-3\sqrt{5}}{(1-3\sqrt{5})(1+3\sqrt{5})} = \frac{2}{1^2 - (3\sqrt{5})^2} = \frac{2}{1-45} =$$

$$= \frac{2}{-44} = -\frac{1}{22}.$$

Значит, значение исходного выражения есть число рациональное.

$$6. \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}.$$

Выражение  $\sqrt{x}+2$  принимает положительные значения при всех допустимых значениях  $x$ .

Дробь  $\frac{1}{\sqrt{x}+2}$  будет наибольшей, если её знаменатель — наименьший, а выражение  $\sqrt{x}+2$  принимает наименьшее значение при  $x=0$ .

Ответ: при  $x=0$ .

### Вариант 3

$$1. \text{ а) } 6\sqrt{3} + \sqrt{27} - 3\sqrt{75} = 6\sqrt{3} + \sqrt{9 \cdot 3} - 3\sqrt{25 \cdot 3} =$$

$$= 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = -6\sqrt{3};$$

$$\text{ б) } (\sqrt{50} - 2\sqrt{2})\sqrt{2} = \sqrt{50} \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{100} - 2 \cdot 2 =$$

$$= 10 - 4 = 6;$$

$$\text{ в) } (2 - \sqrt{3})^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}.$$

$$2. \frac{1}{2}\sqrt{12} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 12} = \sqrt{3},$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{45} = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot 45} = \sqrt{5}.$$

Так как  $\sqrt{3} < \sqrt{5}$ , то  $\frac{1}{2}\sqrt{12} < \frac{1}{3}\sqrt{45}$ .

$$3. \text{ а) } \frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{5}-\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{\sqrt{5}(1-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{0,6};$$



$$б) \frac{a-2\sqrt{a}}{3\sqrt{a}-6} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)}{3(\sqrt{a}-2)} = \frac{\sqrt{a}}{3}.$$

$$4. а) \frac{5}{3\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{3\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{3 \cdot 10} = \frac{\sqrt{10}}{6};$$

$$б) \frac{8}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{8(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{8(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{8(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2} = \frac{8(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} = 2(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}.$$

$$5. \frac{1}{2\sqrt{7}-1} - \frac{1}{2\sqrt{7}+1} = \frac{2\sqrt{7}+1-2\sqrt{7}+1}{(2\sqrt{7}-1)(2\sqrt{7}+1)} = \frac{2}{(2\sqrt{7})^2 - 1^2} =$$

$$= \frac{2}{28-1} = \frac{2}{27}.$$

Значит, значение исходного выражения есть число рациональное.

$$6. \frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{x-7} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{(\sqrt{x}-\sqrt{7})(\sqrt{x}+\sqrt{7})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{7}}.$$

Выражение  $\sqrt{x} + \sqrt{7}$  принимает положительные значения при всех допустимых значениях  $x$ .

Дробь  $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{7}}$  будет наибольшей, если её знаменатель – наименьший, а выражение  $\sqrt{x} + \sqrt{7}$  принимает наименьшее значение при  $x = 0$ .

Ответ: при  $x = 0$ .

#### Вариант 4

$$1. а) 5\sqrt{2} + 2\sqrt{32} - \sqrt{98} = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{16 \cdot 2} - \sqrt{49 \cdot 2} =$$

$$= 5\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = 6\sqrt{2};$$

$$б) (4\sqrt{3} + \sqrt{27}) \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{27} \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot 3 + \sqrt{81} =$$

$$= 12 + 9 = 21;$$

$$в) (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 5 - 2\sqrt{15} + 3 =$$

$$= 8 - 2\sqrt{15}.$$

$$2. \frac{1}{2}\sqrt{28} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 28} = \sqrt{7}; \quad \frac{1}{3}\sqrt{54} = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot 54} = \sqrt{6}.$$

Так как  $\sqrt{7} > \sqrt{6}$ , то  $\frac{1}{2}\sqrt{28} > \frac{1}{3}\sqrt{54}$ .

$$3. \text{ а) } \frac{\sqrt{10}+5}{2+\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2,5};$$

$$\text{ б) } \frac{x-3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-6} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{2(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

$$4. \text{ а) } \frac{7}{2\sqrt{21}} = \frac{7\sqrt{21}}{2\sqrt{21} \cdot \sqrt{21}} = \frac{7\sqrt{21}}{2 \cdot 21} = \frac{\sqrt{21}}{6};$$

$$\begin{aligned} \text{ б) } \frac{22}{\sqrt{13}-\sqrt{2}} &= \frac{22(\sqrt{13}+\sqrt{2})}{(\sqrt{13}-\sqrt{2})(\sqrt{13}+\sqrt{2})} = \frac{22(\sqrt{13}+\sqrt{2})}{(\sqrt{13})^2 - (\sqrt{2})^2} = \\ &= \frac{22(\sqrt{13}+\sqrt{2})}{13-2} = \frac{22(\sqrt{13}+\sqrt{2})}{11} = 2(\sqrt{13}+\sqrt{2}) = \\ &= 2\sqrt{13} + 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \frac{1}{3+\sqrt{15}} + \frac{1}{3-\sqrt{15}} &= \frac{3-\sqrt{15}+3+\sqrt{15}}{(3+\sqrt{15})(3-\sqrt{15})} = \frac{6}{3^2 - (\sqrt{15})^2} = \\ &= \frac{6}{9-15} = \frac{6}{-6} = -1. \end{aligned}$$

Значит, значение исходное выражение есть число рациональное.

$$6. \frac{\sqrt{p}-1}{p-1} = \frac{\sqrt{p}-1}{(\sqrt{p}-1)(\sqrt{p}+1)} = \frac{1}{\sqrt{p}+1}.$$

Выражение  $\sqrt{p}+1$  принимает положительные значения при всех допустимых значениях  $p$ . Дробь  $\frac{1}{\sqrt{p}+1}$  будет наибольшей,

если её знаменатель – наименьший, а выражение  $\sqrt{p}+1$  принимает наименьшее значение при  $p=0$ .

Ответ: при  $p=0$ .

# Глава III. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## Урок 44

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

**Цели:** ввести понятия квадратного уравнения, приведенного квадратного уравнения, неполного квадратного уравнения; формировать умения записывать квадратное уравнение в общем виде, различать его коэффициенты.

### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

1. Является ли число  $a$  корнем уравнения:

а)  $2x - 7 = 8$ ,  $a = 7,5$ ;

б)  $x^2 - x - 20 = 0$ ,  $a = 5$ ;

в)  $(x^3 + 12)(x^2 - 8) = 0$ ,  $a = 2\sqrt{2}$ ?

2. Найдите корни уравнения:

а)  $(x - 3)(x + 12) = 0$ ;

б)  $(6x - 5)(x + 5) = 0$ ;

в)  $(x - 8)(x + 2)(x^2 + 25) = 0$ .

#### III. Объяснение нового материала.

Для введения понятия квадратного уравнения используется задача, при решении которой появляется уравнение, еще не известное учащимся. Возникает проблемная ситуация: мы не можем решить практическую задачу, так как пока не умеем решать уравнения нового вида. На этом уроке можно просто указать, какие корни имеет полученное уравнение, и сообщить, что такое уравнение называется квадратным.

На доску выносятся запись:

Уравнение вида  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  
где  $a, b, c$  – числа,  $a \neq 0$ ,  
называется **квадратным**

Далее рассматривается вопрос о коэффициентах квадратного уравнения. Число  $a$  называется первым коэффициентом, число  $b$  – вторым коэффициентом и число  $c$  – свободный член. Особое внимание обращаем, что число  $a$  не может быть равным нулю, так как в этом случае уравнение примет вид  $bх + c = 0$ , а это линейное уравнение.

Числа  $b$  и  $c$ , в отличие от  $a$ , могут быть и равными нулю. Если хотя бы одно из них равно нулю, то уравнение называется неполным. Можно предложить учащимся самостоятельно выписать виды неполных квадратных уравнений:

| $b$ | $c$ | Уравнение       |
|-----|-----|-----------------|
| 0   | X   | $ax^2 + c = 0$  |
| X   | 0   | $ax^2 + bx = 0$ |
| 0   | 0   | $ax^2 = 0$      |

Для усвоения понятия квадратного уравнения и его коэффициентов следует предложить учащимся следующее задание:

Укажите, какие из данных уравнений являются квадратными, объясните ответ:

а)  $2x^2 + 7x - 3 = 0$ ;

д)  $\frac{1}{4}x^2 - 6x + 1 = 0$ ;

б)  $5x - 7 = 0$ ;

е)  $7x^2 + 5x = 0$ ;

в)  $-x^2 - 5x - 1 = 0$ ;

ж)  $4x^2 + 1 = 0$ ;

г)  $\frac{2}{x^2} + 3x + 4 = 0$ ;

з)  $x^2 - \frac{1}{x} = 0$ .

Затем определяется, какое квадратное уравнение называется приведенным, приводятся примеры.

#### IV. Формирование умений и навыков.

На этом уроке основное внимание следует уделить тому, чтобы учащиеся усвоили понятие квадратного уравнения, могли выделять его из множества уравнений, называть коэффициенты, преобразовывать неприведённое квадратное уравнение в приведённое, овладели соответствующей терминологией.

1. Заполните таблицу.

| Уравнение                 | Коэффициенты |     |     |
|---------------------------|--------------|-----|-----|
|                           | $a$          | $b$ | $c$ |
| $3x^2 + 7x - 6 = 0$       |              |     |     |
| $-5x^2 + 2x + 4 = 0$      |              |     |     |
| $15x - x^2 = 0$           |              |     |     |
| $7x^2 = 0$                |              |     |     |
| $3x - x^2 + 19 = 0$       |              |     |     |
| $2x^2 - 11 = 0$           |              |     |     |
| $\frac{2}{3}x^2 - 2x = 0$ |              |     |     |
| $x^2 + 2 - x = 0$         |              |     |     |

2. Составьте квадратное уравнение по его коэффициентам:

а)  $a = -4; b = 3; c = 1;$

в)  $a = -1; b = \frac{1}{3}; c = 0;$

б)  $a = \frac{1}{2}; b = 0; c = \sqrt{3};$

г)  $a = 2; b = 0; c = 0.$

3. Приведите уравнение к виду  $ax^2 + bx + c = 0$ :

а)  $-x + 2x^2 - 4 = 0;$

г)  $(x - 3)(x + 3) = 2;$

б)  $2x^2 - 3x = 5x - 1;$

д)  $(x - 1)^2 = 2x + 4.$

в)  $(x - 2)(3x - 5) = 0;$

4. Какое из чисел 1;  $-3$  является корнем данного уравнения?

а)  $2y^2 - 3y + 1 = 0;$

в)  $\frac{1}{2}t^2 + t - 1,5 = 0;$

б)  $-x^2 - 5x - 6 = 0;$

г)  $25z^2 - 10z + 1 = 0.$

5. Какие из данных уравнений являются приведёнными; неполными?

а)  $x^2 - 3x + 5 = 0;$

г)  $x^2 - \frac{1}{5}x = 0;$

б)  $-x^2 - 7x + 1 = 0;$

д)  $\frac{2}{3}x^2 = 0;$

в)  $\frac{1}{3}x^2 + 5x - 1 = 0;$

е)  $x^2 - 5 = 0.$

6. Преобразуйте квадратное уравнение в приведённое:

а)  $-x^2 + 2x - 5 = 0$ ;

г)  $3x^2 + 9x - \frac{1}{4} = 0$ ;

б)  $\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1 = 0$ ;

д)  $-5x^2 + 10x + 125 = 0$ ;

в)  $2x^2 - 4x = 0$ ;

е)  $18x^2 = 0$ .

### V. Итоги урока.

– Какое уравнение называется квадратным?

– Может ли коэффициент  $a$  в квадратном уравнении быть равным нулю?

– Является ли уравнение  $3x^2 - 7 = 0$  квадратным? Назовите коэффициенты этого уравнения.

– Какое квадратное уравнение называется неполным? Приведённым? Приведите примеры.

– Как преобразовать неприведённое квадратное уравнение в приведённое?

**Домашнее задание:** № 512, 513.

– Приведите уравнение к виду  $ax^2 + bx + c = 0$ .

а)  $(3x - 1)(x + 2) = 0$ ;

в)  $(3 - x)(3 + x) = 2$ ;

б)  $-3x^2 + 4x = -8x + 1$ ;

г)  $(x - 2)^2 = -3x + 5$ .

## Урок 45

### РЕШЕНИЕ НЕПОЛНЫХ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Цель:** формировать умение решать неполные квадратные уравнения различных видов.

#### Ход урока

**I. Организационный момент.**

**II. Устная работа.**

Найдите корни уравнения:

а)  $x^2 = 0$ ;

в)  $x^2 = \frac{1}{9}$ ;

д)  $x^2 = -\frac{1}{4}$ ;

ж)  $x^2 = 2,56$ ;

б)  $x^2 = 16$ ;

г)  $x^2 = 144$ ;

е)  $x^2 = \frac{9}{121}$ ;

з)  $x^2 = \frac{1}{196}$ .

### III. Проверочная работа.

#### Вариант 1

Составьте квадратное уравнение по его коэффициентам и проверьте, является ли указанное число  $x_0$  корнем этого уравнения:

а)  $a = 2$ ;  $b = -3$ ;  $c = 1$ ;  $x_0 = \frac{1}{2}$ ;

б)  $a = -1$ ;  $b = 4$ ;  $c = 0$ ;  $x_0 = 4$ ;

в)  $a = \sqrt{2}$ ;  $b = -1$ ;  $c = \sqrt{2}$ ;  $x_0 = \sqrt{2}$ .

#### Вариант 2

Составьте квадратное уравнение по его коэффициентам и проверьте, является ли указанное число  $x_0$  корнем этого уравнения:

а)  $a = 3$ ;  $b = -2$ ;  $c = -1$ ;  $x_0 = -\frac{1}{3}$ ;

б)  $a = -1$ ;  $b = 0$ ;  $c = 9$ ;  $x_0 = 3$ ;

в)  $a = \sqrt{3}$ ;  $b = -1$ ;  $c = \sqrt{3}$ ;  $x_0 = \sqrt{3}$ .

### IV. Объяснение нового материала.

Для осознанного восприятия приемов решения неполных квадратных уравнений объяснение проводим на конкретных примерах с последующим составлением алгоритмов решения.

1. Выполнение упражнения № 514 (устно).

2.  $ax^2 = 0$

Пример 1.  $3,8x^2 = 0$ .

#### Решение

Разделим обе части уравнения на 3,8 (число, не равное нулю) и получим уравнение, равносильное исходному:  $x^2 = 0$ .

Мы знаем, что существует только одно число нуль, квадрат которого равен нулю, следовательно, уравнение имеет единственный корень  $x_0 = 0$ .

Ответ: 0.

**Вывод:** уравнение вида  $ax^2 = 0$  ( $a \neq 0$ ) имеет единственный корень  $x_0 = 0$ .

3.  $ax^2 + c = 0$ , где  $c \neq 0$

Пример 2.  $-3x^2 + 21 = 0$ .

Решение

Перенесём свободный член в правую часть уравнения и разделим обе части получившегося уравнения на  $-3$ :

$$-3x^2 = -21; \quad x^2 = 7.$$

Отсюда  $x = \sqrt{7}$  или  $x = -\sqrt{7}$ .

Ответ:  $x = \sqrt{7}$ ;  $x = -\sqrt{7}$ .

Пример 3.  $4x^2 + 6 = 0$ .

Решение

Перенесём свободный член в правую часть уравнения и разделим обе части получившегося уравнения на 4:

$$4x^2 = -6;$$

$$x^2 = -\frac{3}{2}.$$

Так как квадрат числа не может быть отрицательным числом, то уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

**Вывод:** Для решения уравнения вида  $ax^2 + c = 0$  ( $c \neq 0$ ) воспользуемся алгоритмом:

1) Перенесём свободный член  $c$  в правую часть уравнения.

2) Делим обе части уравнения на  $a$  ( $c \neq 0$ ,  $a \neq 0$ ), получаем уравнение  $x^2 = -\frac{c}{a}$ .

3) Если  $-\frac{c}{a} > 0$ , то уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}; \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Если  $-\frac{c}{a} < 0$ , то уравнение не имеет корней.



4.  $ax^2 + bx = 0$ , где  $b \neq 0$

Пример 4.  $5x^2 + 7x = 0$ .

Решение

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x(5x + 7) = 0.$$

Отсюда:  $x = 0$  или  $5x + 7 = 0$ ;

$$5x = -7;$$

$$x = -\frac{7}{5};$$

$$x = -1,4.$$

Ответ: 0; -1,4.

**Вывод:** Для решения уравнения вида  $ax^2 + bx = 0$  ( $b \neq 0$ ) воспользуемся алгоритмом:

1) Разложим левую часть уравнения на множители, получим  $x(ax + b) = 0$ .

2) Решаем уравнение  $ax + b = 0$ ;  $x = -\frac{b}{a}$ .

3) Уравнение имеет два корня:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = -\frac{b}{a}$ .

5. Приведённые примеры показывают учащимся, что неполное квадратное уравнение может иметь один или два корня, а может и не иметь корней. В дальнейшем возможно обобщение этого вывода для любых квадратных уравнений. Для систематизации знаний, полученных на уроке, можно предложить учащимся составить следующую таблицу:

| Коэффициент, равный нулю | $b = 0$ ;<br>$c = 0$ | $b = 0$  | $c = 0$                                     |
|--------------------------|----------------------|--|---|
| Вид                      | $ax^2 = 0$           | $ax^2 + c = 0$   | $ax^2 + bx = 0$                             |
| Решение                  | $x^2 = 0$            | $ax^2 = -c$ ; $x^2 = -\frac{c}{a}$   | $x(ax + b) = 0$<br>$x = 0$ или $ax + b = 0$ |
| Корни                    | $x = 0$              | Если $-\frac{c}{a} > 0$ , то $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$<br>Если $-\frac{c}{a} < 0$ , то корней нет | $x_1 = 0$ ,<br>$x_2 = -\frac{b}{a}$         |

## У. Формирование умений и навыков.

На первых порах желательно, чтобы учащиеся перед решением неполных квадратных уравнений вслух проговаривали их вид и алгоритм решения, пока не будет сформирован устойчивый навык.

№ 515 (а, в, д), 517 (а, в, е), 519 (устно), 523 (а, в).

## У. Итоги урока.

- Какое квадратное уравнение называется неполным?
- Какие существуют виды неполных квадратных уравнений?
- Какие корни имеет уравнение вида  $ax^2 = 0$ ?
- Как решается неполное квадратное уравнение, в котором коэффициенты  $b = 0$ ,  $c \neq 0$ ? Сколько корней может иметь такое уравнение?
- Как решается неполное квадратное уравнение, в котором коэффициенты  $b \neq 0$ ,  $c = 0$ ? Сколько корней может иметь такое уравнение?

Домашнее задание: № 515 (б, г, е), 518 (а, г, д, е), 521 (а, в), 520, 522 (а, в).

## Урок 46

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ НЕПОЛНЫХ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Цели:** продолжить формирование умения решать неполные квадратные уравнения различного вида; формировать умение решать задачи с использованием неполных квадратных уравнений.

### Ход урока

#### У. Организационный момент.

#### У. Устная работа.

Вычислите:

а)  $1\frac{2}{3} \cdot 3$ ;

в)  $\frac{5}{9} : 5$ ;

д)  $6,3 : 7$ ;

ж)  $3\frac{3}{5} : 3$ ;

б)  $0,7 \cdot 8$ ;

г)  $2\frac{1}{2} \cdot 2$ ;

е)  $1,2 \cdot 6$ ;

з)  $0,06 \cdot 7$ .

### III. Математический диктант.

#### Вариант 1

#### [Вариант 2]

1. Запишите квадратное уравнение, у которого первый коэффициент равен 3 [-5], второй коэффициент равен -5 [3]. Свободный член равен нулю.

2. Запишите приведённое квадратное уравнение, у которого второй коэффициент и свободный член равны -2 [-3].

3. Запишите неполное квадратное уравнение, у которого первый коэффициент равен -5 [-3], свободный член равен 7 [5], и решите его.

4. Запишите неполное квадратное уравнение, у которого первый коэффициент равен 3 [5], второй коэффициент равен 5 [7], и решите его.

### IV. Формирование умений и навыков.

• Задачи, решаемые на этом уроке, можно разбить на две группы:

1-я группа. Уравнения, сводящиеся к неполным квадратным уравнениям путём преобразований.

$$1) \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(x+1)^2}{2} = 2.$$

Решение

Умножив обе части уравнения на 4, получим:

$$(x-2)^2 + 2(x+1)^2 = 8.$$

После преобразований имеем уравнение:

$$3x^2 - 2 = 0, \quad x^2 = \frac{2}{3}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ:  $\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

$$2) x^2 + 1 - \frac{x^2 + 3}{3} = \frac{x^2 + 2}{2} - \frac{x^2 + 4}{4}.$$

Решение

Умножив обе части уравнения на 12, получим:

$$12x^2 + 12 - 4(x^2 + 3) = 6(x^2 + 2) - 3(x^2 + 4),$$

$$12x^2 + 12 - 4x^2 - 12 = 6x^2 + 12 - 3x^2 - 12,$$

$$5x^2 = 0, \quad x = 0.$$

Ответ: 0.

$$3) \frac{(x-5)^2 - 6x + 5}{3} = (2-x)(x+5).$$

### Решение

Умножив обе части уравнения на 3, получим:

$$(x-5)^2 - 6x + 5 = 3(2-x)(x+5),$$

$$x^2 - 10x + 25 - 6x + 5 = 6x + 30 - 3x^2 - 15x,$$

$$4x^2 - 7x = 0,$$

$$x(4x - 7) = 0,$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad 4x - 7 = 0,$$

$$x = 4/7.$$

Ответ: 0; 4/7.

2-я группа. Текстовые задачи, решаемые алгебраическим методом с помощью неполных квадратных уравнений: № 524, 526, 527.

Прежде чем перейти к решению задач, необходимо, чтобы учащиеся проговорили, какие этапы включает в себя решение любой задачи алгебраическим методом.

### № 524.

Последовательные целые числа отличаются на единицу (последующее больше предыдущего).

Пусть  $x$  – меньшее целое число, тогда  $(x + 1)$  – последующее целое число (большее). Произведение этих чисел равно  $x(x + 1)$ , что составляет  $x^2 + x$ . Зная, что произведение в 1,5 раза больше квадрата меньшего числа, составим уравнение:

$$x^2 + x = 1,5x^2,$$

$$-0,5x^2 + x = 0,$$

$$x(-0,5x + 1) = 0,$$

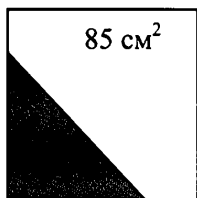
$$x = 0 \quad \text{или} \quad -0,5x + 1 = 0,$$

$$x = 2.$$

Очевидно, что  $x = 0$  противоречит условию задачи (произведение чисел будет равно квадрату меньшего числа). Значит, эти числа 2 и 3.

Ответ: 2; 3.

### № 526.



Площадь квадрата составляет  $59 + 85 = 144 \text{ см}^2$ . Пусть  $x \text{ см}$  – сторона квадрата, тогда  $x^2 \text{ см}^2$  – его площадь. Получаем уравнение:

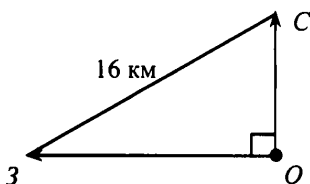
$$x^2 = 144,$$

$$x = \pm 12.$$

Так как длина стороны квадрата выражается положительным числом, то  $x = -12$  – не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 12 см.

### № 527.



Пусть  $t \text{ ч}$  – время, через которое расстояние между туристами будет 16 км. За это время один турист прошёл на север  $4t \text{ км}$ , а второй на запад  $5t \text{ км}$ . Расстояние между ними равно длине отрезка

$ZC$  и вычисляется по теореме Пифагора:  $(ZC)^2 = (OZ)^2 + (OC)^2$ . Зная, что длина отрезка  $ZC$  равна 16 км, составим уравнение:

$$(16)^2 = (5t)^2 + (4t)^2,$$

$$256 = 25t^2 + 16t^2,$$

$$41t^2 = 256,$$

$$t^2 = \frac{256}{41}, \quad t = \pm \frac{16}{\sqrt{41}}, \quad t \approx \pm 2,5.$$

Так как время выражается положительным числом, то  $t \approx -2,5$  не удовлетворяет условию задачи.

Ответ:  $\approx 2,5 \text{ ч}$ .

• Задача повышенной трудности для сильных учащихся.

### № 530.

Согласно условию, отношение длины экрана к его ширине равно  $4 : 3$ , это значит, что можно обозначить  $4x$  и  $3x$  длину

и ширину экрана соответственно (в дюймах). Диагональ вычисляется по теореме Пифагора:

$$(25)^2 = (4x)^2 + (3x)^2,$$

$$625 = 16x^2 + 9x^2,$$

$$25x^2 = 625,$$

$$x^2 = 25,$$

$$x = \pm 5.$$

$x = -5$  – не удовлетворяет условию задачи. Длина экрана равна  $4 \cdot 5 = 20$  дюймов, а ширина равна  $3 \cdot 5 = 15$  дюймов. В сантиметрах эти величины составляют  $20 \cdot 2,54 = 50,8$  и  $15 \cdot 2,54 = 38,1$  соответственно.

Ответ: 20; 15; 50,8; 38,1.

### V. Итоги урока.

- Какое квадратное уравнение называется неполным?
- Какие существуют виды неполных квадратных уравнений и как они решаются?
- Какие этапы выделяются при решении задачи алгебраическим методом?

Домашнее задание: № 532 (б, г), 525, 528, 529.

## Урок 47

### РЕШЕНИЕ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ ВЫДЕЛЕНИЕМ КВАДРАТА ДВУЧЛЕНА

**Цель:** ознакомить учащихся с приемом решения квадратного уравнения выделением квадрата двучлена.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

1. Назовите коэффициенты квадратного уравнения:

а)  $3x^2 - 17x + 4 = 0$ ;

в)  $\frac{1}{3}x^2 = 0$ ;

б)  $2x - x^2 + 1 = 0$ ;

г)  $x^2 + 2x = 0$ .

2. Найдите корни уравнения:

а)  $x^2 = 1,21$ ;

в)  $x^2 = -\frac{1}{9}$ ;

б)  $x^2 = \frac{196}{225}$ ;

г)  $x^2 = 0,0049$ .

3. Представьте одночлен в виде удвоенного произведения двух множителей:

а)  $10x$ ;

в)  $7a$ ;

б)  $-8y$ ;

г)  $\sqrt{12}z$ .

4. Разложите на множители:

а)  $x^2 - 4x + 4$ ;

в)  $\frac{1}{4}y^2 + y + 1$ ;

б)  $a^2 + 6a + 9$ ;

г)  $3x^2 - 6x + 3$ .

### III. Объяснение нового материала.

Для осознанного восприятия приёма решения квадратных уравнений путём выделения квадрата двучлена объяснение следует проводить в несколько этапов.

1. Актуализация знаний.

Прежде всего учащимся необходимо научиться свободно решать уравнения вида  $x^2 = a$  и  $(x + k)^2 = m$ .

Частично знания учащихся были актуализированы при выполнении устной работы. Чтобы ребята вспомнили, как решаются уравнения вида  $(x + k)^2 = m$ , необходимо предложить им задание:

– Решите уравнение:

а)  $(x + 2)^2 = 16$ ;

в)  $(x + 1)^2 = 4$ ;

д)  $(1 - 3x)^2 = \frac{1}{9}$ ;

б)  $(x - 3)^2 = \frac{1}{4}$ ;

г)  $(2x - 7)^2 = -\frac{1}{36}$ ;

е)  $(2x + 1) = 0$ .

2. Ознакомление с приёмом решения квадратного уравнения путём выделения квадрата двучлена следует начать с рассмотрения приведённого квадратного уравнения, левая часть которого представляется в виде полного квадрата двучлена:

$$x^2 + 10x + 25 = 0; \quad x^2 - 6x + 9 = 0; \quad x^2 + x + \frac{1}{4} = 0 \text{ и т. п.}$$

После этого появляется возможность подвести учащихся к мысли о том, что для решения квадратного уравнения нужно привести его к виду  $(x + k)^2 = m$ , а сделать это можно путём выделения квадрата двучлена. Сперва рассматриваем приведённое квадратное уравнение, одновременно выделяя алгоритм решения квадратных уравнений данным приёмом.

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

**1-й шаг.** Записываем второй коэффициент в виде произведения двойки и некоторого числа:  $b = 2n$ .

$$x^2 - 6x - 7 = x^2 - 2 \cdot 3x - 7.$$

**2-й шаг.** Число  $n$  представляет собой второе слагаемое в искомом квадрате двучлена:  $n = 3$ . Для того, чтобы получить искомый квадрат двучлена  $(x - n)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot n + n^2$ , необходимо прибавить  $n^2$  и одновременно вычесть его:

$$x^2 - 2 \cdot 3x - 7 = x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9 - 7.$$

**3-й шаг.** Выделяем квадрат двучлена:

$$x^2 - 6x - 7 = x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 16 = (x - 3)^2 - 16.$$

**4-й шаг.** Решаем полученное уравнение, равносильное исходному:

$$(x - 3)^2 - 16 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 16$$

$$x - 3 = 4 \quad \text{или} \quad x - 3 = -4$$

$$x = 7 \quad \text{или} \quad x = -1.$$

Ответ:  $-1; 7$ .

3. Решение неприведённых квадратных уравнений приёмом выделения квадрата двучлена.

Целью рассмотрения приёма решения квадратных уравнений путём выделения квадрата двучлена является подготовка к осознанному восприятию вывода общей формулы корней. Поэтому не стоит заострять внимание учащихся на технически сложных заданиях. Однако нужно рассмотреть со всем классом пример решения неприведённого квадратного уравнения указанным приёмом (с. 116–117 учебника).



#### IV. Формирование умений и навыков.

Следующие упражнения представляют собой последовательность квадратных уравнений, решаемых приёмом выделения квадрата двучлена, от простых к более сложным.

1. Решите устно.

$$\begin{aligned} \text{а) } x^2 + 12x + 36 &= 0, \\ (x + 6)^2 &= 0, \\ x &= -6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } x^2 - x + \frac{1}{4} &= 0, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 &= 0, \\ x &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2. а) } x^2 - 8x + 15 &= 0, \\ (x^2 - 8x + 16) - 16 + 15 &= 0, \\ (x - 4)^2 - 1 &= 0, \\ (x - 4)^2 &= 1 \\ x - 4 &= -1 \quad \text{или} \quad x - 4 = 1, \\ x &= 3 \quad \text{или} \quad x = 5. \end{aligned}$$

Ответ: 3; 5.

$$\begin{aligned} \text{б) } x^2 - 5x - 6 &= 0, \\ (x^2 - 2 \cdot 2,5x + 6,25) - 6,25 - 6 &= 0, \\ (x - 2,5)^2 - 12,25 &= 0, \\ (x - 2,5)^2 &= 12,25, \\ x - 2,5 &= 3,5 \quad \text{или} \quad x - 2,5 = -3,5, \\ x &= 6 \quad \text{или} \quad x = -1. \end{aligned}$$

Ответ: -1; 6.

$$\begin{aligned} \text{в) } x^2 - 6x + 14 &= 0, \\ (x^2 - 2 \cdot 3x + 9) - 9 + 14 &= 0, \\ (x - 3)^2 + 5 &= 0, \\ (x - 3)^2 &= -5. \text{ Уравнение не имеет решений.} \end{aligned}$$

Ответ: нет корней.

$$\begin{aligned} \text{3. а) } 3x^2 - 4x - 4 &= 0, \\ x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} &= 0, \\ x^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} &= 0, \end{aligned}$$

$$\left(x^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}\right) - \frac{4}{9} - \frac{4}{3} = 0,$$

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} = 0,$$

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{9},$$

$$x - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad \text{или} \quad x - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3},$$

$$x = 2 \quad \text{или} \quad x = -\frac{2}{3}.$$

Ответ:  $-\frac{2}{3}; 2$ .

б)  $2x^2 - 9x + 10 = 0,$

$$x^2 - \frac{9}{2}x + 5 = 0,$$

$$x^2 - 2 \cdot \frac{9}{4}x + 5 = 0,$$

$$\left(x^2 - 2 \cdot \frac{9}{4}x + \frac{81}{16}\right) - \frac{81}{16} + 5 = 0,$$

$$\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16} - 5,$$

$$\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{1}{16},$$

$$x - \frac{9}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad x - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4},$$

$$x = 2,5 \quad \text{или} \quad x = 2.$$

Ответ: 2; 2,5.

4. а) При каком значении  $a$  уравнение  $x^2 - ax + 9 = 0$  имеет корень?

Решение

Выделим квадрат двучлена.

$$x^2 - ax + 9 = 0,$$

$$x^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot x + 9 = 0,$$

$$\left(x^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot x + \frac{a^2}{4}\right) - \frac{a^2}{4} + 9 = 0,$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - 9.$$

Это квадратное уравнение имеет единственный корень, если

$$\frac{a^2}{4} - 9 = 0;$$

$$\frac{a^2}{4} = 9; \quad a^2 = 36; \quad a = \pm 6.$$

Ответ: при  $a = \pm 6$ .

б) При каком значении  $m$  уравнение  $3x^2 - mx - 6 = 0$  имеет единственный корень?

Решение

Выделим квадрат двучлена.

$$3x^2 - mx - 6 = 0,$$

$$x^2 - \frac{m}{3}x - 2 = 0,$$

$$x^2 - 2 \cdot \frac{m}{6}x - 2 = 0,$$

$$\left(x^2 - 2 \cdot \frac{m}{6} \cdot x + \frac{m^2}{36}\right) - \frac{m^2}{36} - 2 = 0,$$

$$\left(x - \frac{m}{6}\right)^2 = \frac{m^2}{36} + 2.$$

Это квадратное уравнение имеет единственный корень, если

$$\frac{m^2}{36} + 2 = 0;$$

$$\frac{m^2}{36} = -2.$$

$$m^2 = -72 \text{ — нет корней.}$$

Ответ: нет решений.

## **V. Итоги урока.**

- Какое уравнение называется квадратным?
- Какое квадратное уравнение называется приведённым?
- Как преобразовать неприведённое квадратное уравнение в приведённое?
- В чём заключается приём решения квадратных уравнений путём выделения квадрата двучлена?
- Любое ли квадратное уравнение может быть решено указанным приёмом?

### **Домашнее задание:**

1. Решить методом выделения квадрата двучлена:  
а)  $5x^2 + 3x - 8 = 0$ ;                      б)  $x^2 - 8x - 9 = 0$ ;
2. При каких значениях  $n$  можно представить в виде квадрата двучлена выражение:  
а)  $x^2 - nx + 16$ ;                      б)  $nx^2 - 12x + 4$ ?
3. Выполнить задания по учебнику: № 534 (б, г, д), 653 (а).

## **Урок 48**

### **ВЫВОД ФОРМУЛЫ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ**

**Цели:** вывести общую формулу нахождения корней квадратного уравнения; формировать умение её использовать.

### **Ход урока**

#### **I. Организационный момент.**

#### **II. Проверочная работа.**

1. Выпишите коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  квадратного уравнения:

#### **Вариант 1**

- а)  $x^2 - 3x + 17 = 0$ ;
- б)  $3x^2 = 2$ ;
- в)  $-7x + 16x^2 = 0$ ;
- г)  $\sqrt{5}x^2 = 0$ .

#### **Вариант 2**

- а)  $7x^2 + 6x - 4 = 0$ ;
- б)  $-x^2 = 5x$ ;
- в)  $18 - x^2 = 0$ ;
- г)  $\sqrt{7}x^2 - 4 = 0$ .

2. Найдите корни уравнения:

**Вариант 1**

а)  $2x^2 - 18 = 0$ ;

б)  $4y^2 + 7y = 0$ ;

в)  $x^2 + 16 = 0$ ;

г)  $(x - 3)^2 - 9 = 0$ .

**Вариант 2**

а)  $x^2 = 7$ ;

б)  $8y^2 - 5y = 0$ ;

в)  $x^2 + 9 = 0$ ;

г)  $(x + 3)^2 - 4 = 0$ .

3. Решите уравнение приемом выделения квадрата двучлена:

**Вариант 1**

$$2x^2 - 24x + 54 = 0$$

**Вариант 2**

$$3x^2 + 24x - 27 = 0$$

### III. Объяснение нового материала.

Для мотивации изучения общей формулы корней квадратного уравнения достаточно обратить внимание учащихся на два момента:

1) решение квадратных уравнений выделением квадрата двучлена часто приводит к громоздким преобразованиям;

2) каждый раз, решая квадратное уравнение данным приёмом, мы повторяем одни и те же шаги (алгоритм).

Указанные пункты позволяют предположить, что можно провести рассуждения о решении квадратного уравнения приёмом выделения квадрата двучлена для уравнения общего вида.

Для наглядности и осознанности восприятия можно процесс вывода формулы корней квадратного уравнения разбить на несколько шагов, записывая при этом на доске параллельно решение конкретного уравнения и уравнения общего вида.

|  |  |
|--|--|
| $2x^2 + 3x + 1 = 0$  | $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$                          |
| Шаг 1. Преобразуем уравнение в приведённое   |  |
| $x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$   | $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$                 |
| Шаг 2. Представим второе слагаемое в виде удвоенного произведения, в котором один из множителей есть $x$ |  |
| $x^2 + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot x + \frac{1}{2} = 0$  | $x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$ |

|  |  |
|--|--|
| Шаг 3. Прибавим к левой части уравнения выражение $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ и вычтем его:  |  |
| $x^2 + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} + \frac{1}{2} = 0$  | $x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$ |
| Шаг 4. Выделим квадрат двучлена:   |  |
| $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$  | $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$   |
| Шаг 5. Решим полученное уравнение:   |  |
| $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$<br>$x + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ или $x + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$<br>$x = -\frac{1}{2}$ или $x = -1$ | $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$   |

Замечаем, что в левой части уравнения находится квадрат выражения (двучлена). Количество корней уравнения зависит от знака правой части уравнения. Более того,  $4a^2 > 0$  для любого  $a \neq 0$ , значит для решения важен только знак выражения  $b^2 - 4ac$ . Так появляется понятие дискриминанта  $D = b^2 - 4ac$  («дискриминант» в переводе с латинского – различитель).

После рассмотрения вопроса о количестве корней квадратного уравнения и вывода их общей формулы желательно вывести на доску плакат:

Решение квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ ;  
 $D = b^2 - 4ac$ .

Если  $D < 0$ , то уравнение не имеет корней;

Если  $D = 0$ , то  $x = -\frac{b}{2a}$ ;

Если  $D > 0$ , то  $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

#### IV. Формирование умений и навыков.

На этом уроке основное внимание следует уделить вопросу определения количества корней квадратного уравнения с помощью дискриминанта. Желательно, чтобы учащиеся за урок выучили формулу  $D = b^2 - 4ac$  и хорошо усвоили алгоритм нахождения корней квадратного уравнения.

1. Выполните упражнение по учебнику: № 533.

2. Докажите, что уравнение не имеет корней:

а)  $x^2 - 5x + 9 = 0$ ;    б)  $3x^2 - 7x + 18 = 0$ ;    в)  $\frac{1}{2}t^2 - 2t + 8 = 0$ .

3. Убедитесь, что уравнение имеет единственный корень, найдите этот корень:

а)  $x^2 - 8x + 16 = 0$ ;    б)  $0,04t^2 - 0,2t + 0,25 = 0$ ;

в)  $\frac{1}{4}y^2 - 3y + 9 = 0$ .

4. Выполните упражнения по учебнику: № 534 (а, в), 535 (а, в, г), 536 (в, д), 538 (а).

#### V. Итоги урока.

– На чем основан вывод формулы корней квадратного уравнения?

– Как вычислить дискриминант квадратного уравнения?

– Сколько корней может иметь квадратное уравнение?

– Как определить количество корней квадратного уравнения?

– Если квадратное уравнение имеет единственный корень, то что можно сказать о трёхчлене, стоящем в левой части уравнения?

**Домашнее задание:** № 535 (б, д, е), 536 (б, г, е), 537 (а, в).

### Урок 49

#### РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ФОРМУЛЕ

**Цель:** продолжить формирование умения решать квадратные уравнения по формуле.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

## II. Устная работа.

Вычислите:

а)  $\sqrt{\frac{1}{7}} \cdot \sqrt{\frac{1}{7}}$ ;

в)  $\sqrt{\frac{4}{121}}$ ;

д)  $2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$ ;

б)  $(\sqrt{283})^2$ ;

г)  $\sqrt{0,0081}$ ;

е)  $\sqrt{2,56}$ .

## III. Проверочная работа.

Вычислите дискриминант квадратного уравнения и напишите, сколько корней имеет уравнение:

### Вариант 1

а)  $5x^2 - 4x - 1 = 0$ ;

б)  $x^2 - 6x + 9 = 0$ ;

в)  $3x - x^2 + 10 = 0$ ;

г)  $2x + 3 + 2x^2 = 0$ .

Ответы:

### Вариант 1

а)  $D = 36$ , 2 корня;

б)  $D = 0$ , 1 корень;

в)  $D = 49$ , 2 корня;

г)  $D = -20$ , нет корней.

### Вариант 2

а)  $3x^2 - 5x + 2 = 0$ ;

б)  $4x^2 - 4x + 1 = 0$ ;

в)  $2x - x^2 + 3 = 0$ ;

г)  $3x + 1 + 6x^2 = 0$ .

### Вариант 2

а)  $D = 1$ , 2 корня;

б)  $D = 0$ , 1 корень;

в)  $D = 16$ , 2 корня;

г)  $D = -15$ , нет корней.

## IV. Формирование умений и навыков.

На этом уроке основное внимание следует уделить непосредственному применению алгоритма вычисления корней квадратного уравнения по формуле. Важно, чтобы учащиеся запомнили этот алгоритм, а также желательно, чтобы они начали запоминать формулу корней.

Во избежание формального применения алгоритма на этом уроке следует решать упражнения, в которых требуется проводить преобразования квадратного уравнения к общему виду.

Кроме того, следует приучать учащихся преобразовывать даже квадратные уравнения стандартного вида к более «удобным», решение которых будет менее громоздким и трудным, чем решение исходного уравнения. Для этого следует обратить



внимание на три случая, встречающиеся при решении квадратных уравнений:

1) Коэффициент  $a$  является отрицательным. Нужно домножить обе части уравнения на  $-1$ .

2) Все коэффициенты уравнения имеют общий делитель. Нужно разделить обе части уравнения на этот делитель.

3) Среди коэффициентов уравнения встречаются дробные. Нужно умножить обе части уравнения на наименьшее общее кратное знаменателей дробей, чтобы коэффициенты стали целыми (возможны исключения).

Также на этом уроке следует чередовать полные и неполные квадратные уравнения, чтобы учащиеся осознанно выбирали рациональный способ решения: по общей формуле либо по одному из алгоритмов решения неполного квадратного уравнения.

• № 541 (а, г, д), 542 (б, г, ж), 543 (б, е),

• № 544 (а, г), 546 (б), 547 (б, г), 549.

**№ 544.**

$$а) (2x - 3)(5x + 1) = 2x + \frac{2}{5},$$

$$10x^2 + 2x - 15x - 3 - 2x - \frac{2}{5} = 0,$$

$$10x^2 - 15x - \frac{17}{5} = 0,$$

$$D = (-15)^2 - 4 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{17}{5}\right) = 225 + 136 = 361, \quad D > 0; \quad 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{15 + \sqrt{361}}{2 \cdot 10} = \frac{15 + 19}{20} = \frac{34}{20} = 1,7;$$

$$x_2 = \frac{15 - \sqrt{361}}{2 \cdot 10} = \frac{15 - 19}{20} = -\frac{4}{20} = -0,2.$$

Ответ:  $-0,2; 1,7$ .

**Примечание.** При решении этого квадратного уравнения нецелесообразно домножать обе части уравнения на число, чтобы получить целые коэффициенты. Наоборот, работа с дробным свободным членом позволяет упростить ход вычислений.

$$\text{г) } -x(x+7) = (x-2)(x+2),$$

$$-x^2 - 7x = x^2 - 4,$$

$$-2x^2 - 7x + 4 = 0,$$

$$2x^2 + 7x - 4 = 0,$$

$$D = (7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 49 + 32 = 81, \quad D > 0, \quad 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 + 9}{4} = \frac{2}{4} = 0,5;$$

$$x_2 = \frac{-7 - \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 - 9}{4} = \frac{-16}{4} = -4.$$

Ответ:  $-4; 0,5$ .

**№ 546.**

$$\text{б) } 15x^2 + 17 = 15(x+1)^2,$$

$$15x^2 + 17 = 15(x^2 + 2x + 1),$$

$$15x^2 + 17 = 15x^2 + 30x + 15,$$

$$30x - 2 = 0,$$

$$x = \frac{1}{15}.$$

Ответ:  $\frac{1}{15}$ .

**№ 549.**

$$x^2 = 0,5x + 3.$$

### Графическое решение

Построим график функций  $y = x^2$  и  $y = 0,5x + 3$ .

Абсциссы точек пересечения графиков будут являться решением данного уравнения.

Графиком функции  $y = x^2$  является парабола, вершина которой находится в начале координат, ветви направлены вверх.

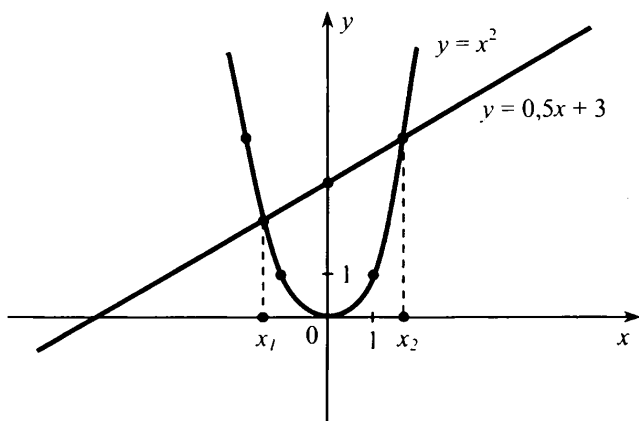
Контрольные точки:

|     |    |    |   |   |   |
|-----|----|----|---|---|---|
| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $y$ | 4  | 1  | 0 | 1 | 4 |

Графиком функции  $y = 0,5x + 3$  является прямая, проходящая через точки

|     |   |    |
|-----|---|----|
| $x$ | 0 | -2 |
| $y$ | 3 | 2  |

$$x_1 \approx -1; \quad x_2 = 2.$$



Аналитическое решение  
(с помощью формулы корней)

$$x^2 - 0,5x - 3 = 0,$$

$$2x^2 - x - 6 = 0.$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 1 + 48 = 49, D > 0, 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{1 - 7}{4} = -\frac{6}{4} = -1,5,$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{1 + 7}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

Ответ:  $-1,5; 2$ .

**V. Итоги урока.**

- Как определить количество корней квадратного уравнения?
- Каков алгоритм вычисления корней квадратного уравнения?
- Что нужно сделать, прежде чем применять алгоритм вычисления корней, если коэффициент  $a$  квадратного уравнения является отрицательным?

– Что нужно сделать, если все коэффициенты квадратного уравнения имеют общий делитель?

– Что нужно сделать, если хотя бы один коэффициент квадратного уравнения является дробным?

**Домашнее задание:** № 542 (а, в, е, з), 543 (г, д), 544 (в), 545 (а, г), 547 (в).

**Урок 50**  
**РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ**  
**С ЧЕТНЫМ ВТОРЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ**

**Цели:** вывести формулу (II) нахождения корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом; формировать умение применять формулы I и II для решения квадратных уравнений.

**Ход урока**

**I. Организационный момент.**

**II. Устная работа.**

1. Назовите коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  уравнений:

а)  $4x^2 - 5x - 7 = 0$ ;

г)  $8 - 9x^2 = 0$ ;

б)  $x^2 + 2 - 3x = 0$ ;

д)  $11x^2 = 0$ ;

в)  $3x^2 + 2x = 0$ ;

е)  $17 - x^2 - x = 0$ .

2. Решите уравнение:

а)  $2x^2 - 18 = 0$ ;

в)  $x^2 + 16 = 0$ ;

б)  $3x^2 - 12x = 0$ ;

г)  $3,6x^2 = 0$ .

3. Сколько корней имеет уравнение:

а)  $6x^2 - 5x = 0$ ;

в)  $3x^2 - 4 = 0$ ;

б)  $x^2 - 4x + 4 = 0$ ;

г)  $2x^2 + 7 = 0$ .

**III. Объяснение нового материала.**

1. Создание проблемной ситуации.

Предложить учащимся для решения квадратное уравнение  $15x^2 - 34x + 15 = 0$ . Используя формулу нахождения корней квадратного уравнения, получаем:

$$D = (-34)^2 - 4 \cdot 15 \cdot 15 = 1156 - 900 = 256.$$

$$x_1 = \frac{34 - \sqrt{256}}{2 \cdot 15} = \frac{34 - 16}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5};$$

$$x_2 = \frac{34 + \sqrt{256}}{2 \cdot 15} = \frac{34 + 16}{30} = \frac{50}{30} = \frac{5}{3}.$$

Решая это уравнение, учащиеся вынуждены проводить вычисления достаточно громоздкие, в отличие от ранее решаемых уравнений.

Можно теперь сообщить учащимся, что для решения квадратных уравнений, у которых второй коэффициент четный, существует другая формула корней, позволяющая упростить вычисления.

2. Вывод этой формулы проводится согласно пункту учебника. Причём в сильном классе можно предложить учащимся проделать это самостоятельно, записав только общий вид такого уравнения:  $ax^2 + 2 \cdot k \cdot x + c = 0$  ( $b = 2k$ ).

После вывода формулы возвращаемся к решенному уравнению и применяем новую формулу:

$$D = (-17)^2 - 15 \cdot 15 = 289 - 225 = 64.$$

$$x_1 = \frac{17 - \sqrt{64}}{15} = \frac{17 - 8}{15} = \frac{3}{5}; \quad x_2 = \frac{17 + \sqrt{64}}{15} = \frac{17 + 8}{15} = \frac{5}{3}.$$

Как видим, вычисления можно произвести «в уме», так как все значения квадратов чисел – табличные.

На доску можно вынести плакат:

Решение квадратного уравнения  $a^2 + kx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ ;

$$D_1 = k^2 - ac.$$

Если  $D_1 < 0$ , то уравнение не имеет корней;

$$\text{Если } D_1 = 0, \text{ то } x = -\frac{k}{a};$$

$$\text{Если } D_1 > 0, \text{ то } x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

Обращаем внимание учащихся, что  $D_1$  в четыре раза меньше, чем  $D$ .

#### IV. Формирование умений и навыков.

Все задания, решаемые на этом уроке, можно разбить на три группы:

1-я группа. Задания на непосредственное применение формулы (II) корней квадратного уравнения: № 539 (б, г, ж), 540 (в, з).

При решении этих заданий демонстрируем учащимся применение новой формулы для случая, когда корни уравнения являются иррациональными. Для этого вызываем двух учеников к доске и параллельно проводим решение по разным формулам.

**№ 539.**

ж)  $7z^2 - 20z + 14 = 0$

| Формула I  | Формула II                                      |
|--|---|
| $D = (-20)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 14 =$ $= 400 - 392 = 8$   | $D_1 = (-10)^2 - 7 \cdot 14 =$ $= 100 - 98 = 2$ |
| (Ещё раз замечаем, что $D_1 = \frac{D}{4}$ )   |   |
| $x = \frac{20 \pm \sqrt{8}}{14}$ . Вынесем множитель<br>из-под знака корня: $x = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{14}$ ,<br>то есть $x = \frac{10 \pm \sqrt{2}}{7}$ | $x = \frac{10 \pm \sqrt{2}}{7}$                 |

Таким образом, получаем такие же корни.

2-я группа. Задания с выбором формулы (I или II) корней квадратного уравнения в зависимости от второго коэффициента: № 541 (б, в, ж), 546 (а, г), 550 (б), 552 (а, в), 553 (а).

3-я группа. Задания повышенной трудности: № 554, 555 можно предложить сильным учащимся, сократив для них количество заданий из 1-й и 2-й групп.

**№ 554.**

а)  $x^2 - 5x + 6 = 0$ ;

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1, D > 0.$

$x_1 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2;$        $x_2 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3.$

$6x^2 - 5x + 1 = 0$ ;

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25 - 24 = 1, D > 0.$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}; \quad x_1 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

$$б) 2x^2 - 13x + 6 = 0;$$

$$D = (-13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 169 - 48 = 121, D > 0.$$

$$x_1 = \frac{13 - \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \frac{13 - 11}{4} = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{13 + \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \frac{13 + 11}{4} = 6.$$

$$6x^2 - 13x + 2 = 0;$$

$$D = (-13)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 169 - 48 = 121, D > 0.$$

$$x_1 = \frac{13 - \sqrt{121}}{2 \cdot 6} = \frac{13 - 11}{12} = \frac{1}{6}; \quad x_2 = \frac{13 + \sqrt{121}}{2 \cdot 6} = \frac{13 + 11}{12} = 2.$$

Можно предположить, что корни уравнений  $ax^2 + bx + c = 0$  и  $cx^2 + bx + a = 0$  являются взаимно обратными числами. Докажем это.

| $ax^2 + bx + c = 0$                       | $cx^2 + bx + a = 0$                                    |
|---|--|
| $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$ | $x_3 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot ca}}{2c};$       |
| $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  | $x_4 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot c \cdot a}}{2c}$ |

(Мы предполагаем, что  $b^2 - 4ac \geq 0$ , то есть корни существуют.)

Вычислим  $x_1 \cdot x_4 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} =$

$$= \frac{(-b)^2 - |b^2 - 4ac|}{4ac} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4ac} = 1. \text{ Значит, } x_1 \text{ и } x_4 \text{ - взаимно}$$

обратные числа.

Аналогично доказывается, что  $x_1$  и  $x_3$  - взаимно обратные числа.

**№ 555.**

$$x^2 - ax + (a - 4) = 0.$$

$$D = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a - 4) = a^2 - 4a + 16.$$

Чтобы определить количество корней, необходимо оценить дискриминант. Выделим в выражении квадрат двучлена:

$$D = (a^2 - 2 \cdot 2 \cdot a + 4) + 12 = (a - 2)^2 + 12.$$

Дискриминант принимает положительные значения при любом  $a$  (точнее  $D \geq 12$ ), значит, при любом  $a$  уравнение имеет два корня.

О т в е т : а) нет; б) нет; в) при любом  $a$ .

## V. Итоги урока.

– В каких случаях применяется формула II корней квадратного уравнения?

– В каком отношении находятся  $D_1$  и  $D$ ?

– По какой формуле вычисляется  $D_1$ ?

– Можно ли применять формулу I корней квадратного уравнения, если коэффициент  $b$  чётный?

– Могут ли получиться разные корни при применении различных формул корней квадратного уравнения?

**Домашнее задание:** № 539 (в, е, з), 540 (б, е, ж), 541 (е, з), 548 (б, г), 551 (а, г, д).

## Урок 51

### КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ КАК МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕКСТОВОЙ ЗАДАЧИ

**Ц е л и :** ввести понятие *математическая модель*; выделить этапы решения задач алгебраическим методом; формировать умение составлять квадратное уравнение по условию задачи и решать его.

### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

Найдите сторону квадрата, если его площадь равна:

а)  $81 \text{ см}^2$ ;

в)  $\frac{4}{121} \text{ м}^2$ ;

д)  $225 \text{ см}^2$ ;

б)  $0,49 \text{ дм}^2$ ;

г)  $\frac{1}{64} \text{ м}^2$ ;

е)  $\frac{9}{144} \text{ м}^2$ .



### III. Проверочная работа.

#### Вариант 1

1. Сколько корней имеет уравнение? Поясните ответ.

а)  $3x^2 - 7x = 0$ ;

в)  $2x^2 - 1 = 0$ ;

б)  $x^2 - 2x + 1 = 0$ ;

г)  $x^2 + 3x + 3 = 0$ .

2. Решите уравнение:

а)  $5x^2 + 14x - 3 = 0$ ;

в)  $7x^2 + 8x + 1 = 0$ ;

б)  $x^2 - 2x + 2 = 0$ ;

г)  $x - 3x^2 - 2 = 0$ .

#### Вариант 2

1. Сколько корней имеет уравнение? Поясните ответ.

а)  $6x^2 - 5x = 0$ ;

в)  $3x^2 - 4 = 0$ ;

б)  $x^2 - 4x + 4 = 0$ ;

г)  $x^2 - 4x + 5 = 0$ .

2. Решите уравнение:

а)  $5x^2 + 8x - 4 = 0$ ;

в)  $7x^2 + 6x - 1 = 0$ ;

б)  $x^2 - 6x + 11 = 0$ ;

г)  $4x - 3x^2 - 2 = 0$ .

### IV. Развивающее задание.

Составьте квадратное уравнение, корни которого равны:

а) 1 и 3;

б)  $\sqrt{3}$  и  $-\sqrt{3}$ ;

в)  $1 - \sqrt{3}$ ;  $1 + \sqrt{3}$ .

### V. Объяснение нового материала.

Объяснение следует начать с конкретной (с. 124 учебника) задачи, в процессе решения которой учащиеся открывают новый факт: корень уравнения, составленного по условию задачи, может не удовлетворять этому условию. В то же время полученные при решении квадратного уравнения два различных корня могут одновременно отвечать условию задачи. Поэтому возникает необходимость интерпретации полученного решения.

Важно, чтобы учащиеся осознали значимость новой ситуации и вместе с учителем чётко выделили этапы решения задачи алгебраическим методом:

1. Анализ условия задачи и его схематическая запись.

2. Перевод естественной ситуации на математический язык (построение математической модели текстовой задачи).

3. Решение уравнения, полученного при построении математической модели.

4. Интерпретация полученного решения.

Четвёртый этап решения задачи алгебраическим методом является принципиально новым для учащихся, поэтому на нём следует заострить внимание. Можно попросить учащихся привести примеры ситуаций, когда полученный корень уравнения может противоречить условию задачи.

В процессе обсуждения этого вопроса можно выделить несколько самых распространённых ситуаций:

1) Корень уравнения является отрицательным числом, когда за неизвестное принята какая-то мера, которая может выражаться только положительным числом (например, длина, площадь, объём и т. п.).

2) Корень уравнения является числом из более широкого множества, чем то, которое описывается в задаче (например, получено дробное число, когда в условии задачи речь идет о целых числах).

3) Несоответствие полученных положительных размеров с реальными (например, скорость пешехода равна 80 км/ч и т. п.)

При решении задач учащиеся могут в процессе интерпретации полученных решений соотносить ситуации с тремя выделенными.

## VI. Формирование умений и навыков.

• Выполнение заданий по учебнику: № 559, 561, 563.

### № 563.

Пусть  $x$  см – длина одного катета прямоугольного треугольника, тогда  $(23 - x)$  см – длина второго катета. Зная, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов и составляет  $60 \text{ см}^2$ , составим уравнение:

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot (23 - x) = 60,$$

$$x(23 - x) = 120,$$

$$23x - x^2 - 120 = 0,$$

$$x^2 - 23x + 120 = 0,$$

$$D = (-23)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 120 = 529 - 480 = 49, \quad D > 0, \quad 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{23 + \sqrt{49}}{2} = \frac{23 + 7}{2} = 15;$$

$$x_2 = \frac{23 - \sqrt{49}}{2} = \frac{23 - 7}{2} = 8.$$

Оба корня удовлетворяют условию задачи.

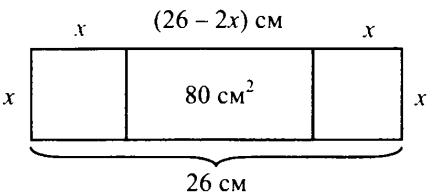
Ответ: 8; 15.

### № 564.

В задаче встречается понятие «последовательные натуральные числа». Нужно убедиться, что учащиеся понимают, о чём идёт речь.

### № 566.

Анализ: Пусть  $x$  см – ширина листа картона, тогда длина оставшейся части картона равна  $(26 - 2x)$  см, а её площадь  $x(26 - 2x)$  см<sup>2</sup>. Зная, что площадь оставшейся части картона равна 80 см<sup>2</sup>, составим уравнение:



$$x(26 - 2x) = 80,$$

$$26x - 2x^2 - 80 = 0,$$

$$x^2 - 13x + 40 = 0,$$

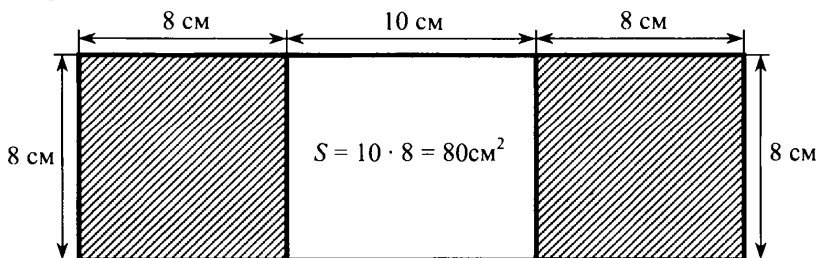
$$D = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40 = 169 - 160 = 9, \quad D > 0, \quad 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{13 + \sqrt{9}}{2} = \frac{16}{2} = 8;$$

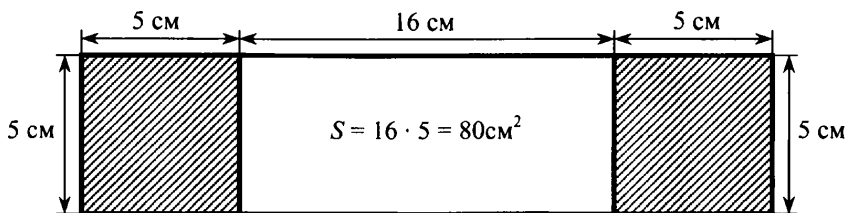
$$x_2 = \frac{13 - \sqrt{9}}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Интерпретация (чертёж в масштабе 1: 2).

1-е решение:



2-е решение:



Ответ: 5 см; 8 см.

**№ 568** (самостоятельное решение).

Пусть  $x$  – число рядов в кинотеатре, тогда  $(x + 8)$  – число мест в ряду. Количество мест в кинотеатре равно  $x \cdot (x + 8)$ . Зная, что всего в кинотеатре 884 места, составим уравнение:

$$x \cdot (x + 8) = 884,$$

$$x^2 + 8x - 884 = 0,$$

$$D_1 = 4^2 - 1 \cdot (-884) = 16 + 884 = 900, \quad D_1 > 0, \quad 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = -4 + \sqrt{900} = -4 + 30 = 26;$$

$$x_2 = -4 - \sqrt{900} = -4 - 30 = -34 \text{ – не удовлетворяет условию}$$

задачи.

Ответ: 26 рядов.

## VII. Итоги урока.

– Что понимается под математической моделью текстовой задачи?

– Какие этапы решения задачи алгебраическим методом выделяют?

– В чём состоит интерпретация полученного решения задачи?

– Приведите примеры, когда полученное решение противоречит условию задачи.

**Домашнее задание:** № 560, 562, 565, 567.

## Урок 52

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Цель:** продолжить формирование умения решать текстовые задачи с помощью составления квадратных уравнений.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Устная работа.

1. Найдите дискриминант квадратного уравнения и определите, сколько корней имеет уравнение:

а)  $x^2 + 8x - 3 = 0$ ;

в)  $x^2 + 6x + 9 = 0$ ;

б)  $2x^2 - x + 10 = 0$ ;

г)  $7x^2 + 2x + 5 = 0$ .

2. Решите уравнение:

а)  $x^2 = 1600$ ;

в)  $x^2 = -\frac{1}{4}$ ;

д)  $x^2 = 0$ ;

б)  $x^2 = 5$ ;

г)  $x^2 = 1,44$ ;

е)  $x^2 = \frac{1}{2}$ .

##### III. Формирование умений и навыков.

##### № 570.

Пусть  $x$  – число обезьян в стае, тогда  $\left(\frac{x}{5} - 3\right)^2$  обезьян спрятались в гроте. Зная, что на виду осталась одна обезьяна, составим уравнение:

$$\left(\frac{x}{5} - 3\right)^2 + 1 = x,$$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{6x}{5} + 9 + 1 - x = 0,$$

$$x^2 - 30x + 250 - 25x = 0,$$

$$x^2 - 55x + 250 = 0,$$

$$D = (-55)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 250 = 3025 - 1000 = 2025, D > 0, \quad 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{55 + \sqrt{2025}}{2} = \frac{55 + 45}{2} = 50,$$

$$x_2 = \frac{55 - \sqrt{2025}}{2} = \frac{55 - 45}{2} = 5 \text{ — не удовлетворяет условию}$$

задачи, так как  $\frac{x}{5} - 3$  в этом случае — отрицательное число.

О т в е т : 50 обезьян.

### № 571.

Пусть  $x$  — количество сторон в выпуклом многоугольнике, тогда  $(x + 25)$  — количество диагоналей в нём. Зная, что количество диагоналей ( $p$ ) связано с количеством сторон ( $n$ ) по формуле

$p = \frac{n(n-3)}{2}$ , составим уравнение:

$$x + 25 = \frac{x(x-3)}{2},$$

$$2x + 50 = x(x-3),$$

$$2x + 50 = x^2 - 3x,$$

$$2x + 50 - x^2 + 3x = 0,$$

$$5x + 50 - x^2 = 0,$$

$$x^2 - 5x - 50 = 0,$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-50) = 25 + 100 = 125, \quad D > 0, \quad 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{125}}{2} = \frac{5 + 15}{2} = 10, \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{125}}{2} = \frac{5 - 15}{2} = -5.$$

Так как  $x$  выражает число сторон многоугольника, то это не может быть отрицательное число, значит,  $x_2 = -5$  не удовлетворяет условию задачи.

О т в е т : в десятиугольнике.

### № 573.

При решении этой задачи используются элементы комбинаторики, поэтому следует разобрать её с учителем.

#### Р е ш е н и е

Пусть  $x$  — количество участников турнира, тогда каждый участник играл с  $(x - 1)$  участником. Количество комбинаций равно  $x(x - 1)$ . Но так как в комбинации участвует два человека,

а партия одна, то число партий равно  $\frac{x(x-1)}{2}$ .

Зная, что всего было сыграно 45 партий, составим уравнение:

$$\frac{x(x-1)}{2} = 45;$$

$$x \cdot (x-1) = 90,$$

$$x^2 - x - 90 = 0,$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) = 1 + 360 = 361, \quad D > 0, \quad 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{361}}{2} = \frac{1 + 19}{2} = 10; \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{361}}{2} = \frac{1 - 19}{2} = -9.$$

Так как  $x$  выражает количество участников турнира, то это не может быть отрицательное число, значит,  $x_2 = -9$  не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 10 участников.

### № 575.

Пусть  $x$ ,  $(x+1)$ ,  $(x+2)$  – три последовательных целых числа. Зная, что сумма их квадратов равна 869, составим уравнение:

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 869,$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 - 869 = 0,$$

$$3x^2 + 6x - 864 = 0,$$

$$x^2 + 2x - 288 = 0,$$

$$D = (-2)^2 - 1 \cdot (-288) = 289, \quad D > 0, \quad 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{289} = -1 + 17 = 16,$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{289} = -1 - 17 = -18.$$

Оба корня удовлетворяют условию задачи, значит, это последовательные числа 16; 17; 18 или  $-18$ ;  $-17$ ;  $-16$ .

Ответ: 16; 17; 18 или  $-18$ ;  $-17$ ;  $-16$ .

## IV. Проверочная работа.

Решите задачи:

### Вариант 1

1. Два последовательных чётных числа таковы, что квадрат большего из них в 9 раз больше меньшего числа. Найдите эти числа.

2. Одну сторону квадрата уменьшили на 2 см, а другую – на 1 см и получили прямоугольник с площадью 6 см<sup>2</sup>. Найдите длину стороны квадрата. Изобразите квадрат и прямоугольник.

## Вариант 2

1. Два последовательных нечётных числа таковы, что квадрат большего из них в 9 раз больше меньшего числа. Найдите эти числа.

2. Одну сторону квадрата увеличили на 2 см, а другую – на 1 см и получили прямоугольник с площадью  $12 \text{ см}^2$ . Найдите длину стороны квадрата. Изобразите квадрат и прямоугольник.

**Примечание.** В зависимости от уровня подготовки класса можно сократить содержание проверочной работы до одной задачи.

Пример выполнения проверочной работы:

### Вариант 1

1. Пусть  $x$  и  $(x + 2)$  – два последовательных чётных числа. Зная, что квадрат большего из них в 9 раз больше меньшего числа, составим уравнение:

$$(x + 2)^2 = 9x,$$

$$x^2 + 4x + 4 - 9x = 0,$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9, \quad D > 0, \quad 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{9}}{2} = \frac{5 + 3}{2} = 4, \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{9}}{2} = \frac{5 - 3}{2} = 1.$$

Так как число – чётное, то  $x_2 = 1$  – не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 4; 6.

2. Пусть  $x$  см – сторона квадрата, тогда  $(x - 2)$  см и  $(x - 1)$  см – стороны прямоугольника. Зная, что площадь полученного прямоугольника равна 6 см, составим уравнение:

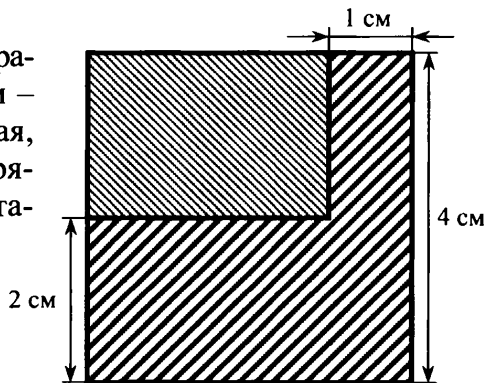
$$(x - 2)(x - 1) = 6,$$

$$x^2 - x - 2x + 2 - 6 = 0,$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0,$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25, \quad D > 0, \quad 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{25}}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{25}}{2} = \frac{3 - 5}{2} = -1.$$





Так как сторона квадрата выражается положительным числом, то  $x_2 = -1$  – не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 4 см.

### Вариант 2

1. Пусть  $x$  и  $(x + 2)$  – два последовательных нечётных числа. Зная, что квадрат большего из них в 9 раз больше меньшего числа, составим уравнение:

$$(x + 2)^2 = 9x,$$

$$x^2 + 4x + 4 - 9x = 0,$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9, \quad D > 0, \quad 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{9}}{2} = \frac{5 + 3}{2} = 4, \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{9}}{2} = \frac{5 - 3}{2} = 1.$$

Так как число – нечётное, то  $x_1 = 4$  – не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 1; 3.

2. Пусть  $x$  см – сторона квадрата, тогда  $(x + 2)$  см и  $(x + 1)$  см – стороны прямоугольника. Зная, что площадь полученного прямоугольника равна 12 см, составим уравнение:

$$(x + 2)(x + 1) = 12,$$

$$x^2 + x + 2x + 2 - 12 = 0,$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0,$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49, \quad D > 0, \quad 2 \text{ корня.}$$

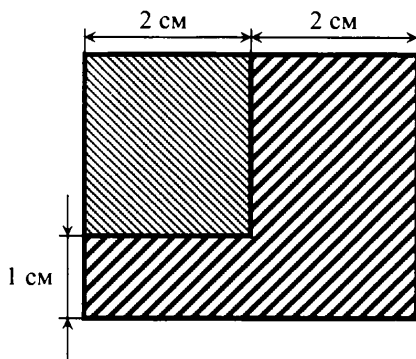
$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 + 7}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 - 7}{2} = -5.$$

Так как сторона квадрата выражается положительным числом, то  $x_2 = -5$  – не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 2 см.

### V. Итоги урока.

– Какие этапы выделяют при решении задачи алгебраическим методом?



– В чём состоит интерпретация полученного решения задачи?  
– Когда полученное решение может противоречить условию задачи?

– Какие решения, полученные на сегодняшнем уроке, вы интерпретировали как противоречащие условию задачи?

**Домашнее задание:** № 569, 572, 574, 578 (6).

## Урок 53

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ВЬЕТА И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ

**Цели:** изучить теорему Виета; формировать умение применять теорему Виета и обратную ей теорему при решении приведённых квадратных уравнений.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Устная работа.

1. Назовите полные, неполные и приведённые квадратные уравнения:

а)  $3x^2 - 2x = 0$ ;

е)  $-21x^2 + 16x = 0$ ;

б)  $7x^2 - 16x + 4 = 0$ ;

ж)  $x^2 = 0$ ;

в)  $x^2 - 3 = 0$ ;

з)  $x^2 + 4x + 4 = 0$ ;

г)  $-x^2 + 2x - 4 = 0$ ;

и)  $x^2 = 4$ ;

д)  $2 - 6x + x^2 = 0$ ;

к)  $-7x^2 + 6 = 0$ .

2. Преобразуйте квадратное уравнение в приведённое:

а)  $3x^2 + 6x - 12 = 0$ ;

г)  $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}x - 2 = 0$ ;

б)  $2x^2 = 0$ ;

д)  $3x^2 - 7 = 0$ ;

в)  $-x^2 - 2x + 16 = 0$ ;

е)  $-5x^2 + 10x - 2 = 0$ .

##### III. Объяснение нового материала.

1. «Открытие» теоремы Виета.

Целесообразно организовать лабораторную исследовательскую работу. Для этого разбить класс на пять групп, каждой из

которых дать решить приведённое квадратное уравнение. После его решения один представитель от каждой группы выходит к доске и заполняет соответствующую строку в таблице:

| Уравнение           | $b$ | $c$ | Корни | Сумма корней | Произведение корней |
|---------------------|-----|-----|-------|--------------|---------------------|
| $x^2 - 3x + 12 = 0$ |     |     |       |              |                     |
| $x^2 - x - 12 = 0$  |     |     |       |              |                     |
| $x^2 + 5x + 6 = 0$  |     |     |       |              |                     |
| $x^2 + 3x - 10 = 0$ |     |     |       |              |                     |
| $x^2 - 6x - 7 = 0$  |     |     |       |              |                     |

После этого учитель предлагает учащимся сравнить сумму и произведение полученных корней с коэффициентами  $b$  и  $c$  и выдвинуть гипотезу. Учитель подтверждает сделанное предположение, сообщая, что данное утверждение называется теоремой Виета, обращая внимание учащихся, что эта теорема справедлива для приведенных квадратных уравнений.

Можно привести краткий исторический материал о жизни и деятельности Франсуа Виета.

Рассмотреть доказательство теоремы можно как по учебнику (с. 127–128), так и привлекая учащихся, поскольку оно не является сложным. После доказательства на доску выносятся запись:

**Теорема Виета**

Если  $x_1, x_2$  – корни уравнения  $x^2 + px + q = 0$ ,  
то  $x_1 + x_2 = -p$ ;  $x_1 \cdot x_2 = q$

Для первичного усвоения теоремы Виета можно предложить учащимся выполнить устно упражнение на нахождение суммы и произведения корней квадратного уравнения:

1) № 580 (а, б, в, г) – устно.

2)  $x^2 - \frac{3}{7}x - 5 = 0$ .

3)  $x^2 + 3x + 5 = 0$ .

При выполнении этого задания необходимо предотвратить формальное применение теоремы Виета. Нужно убедиться, что

квадратное уравнение имеет корни. Если учащиеся сами не выскажут эту мысль, то при решении третьего задания предложить им найти дискриминант уравнения и сделать соответствующий вывод.

## 2. Теорема Виета для неприведённого квадратного уравнения.

При выполнении устной работы в начале урока учащиеся вспомнили, как преобразовать квадратное уравнение в приведённое. Следует предложить им самостоятельно вывести формулы для неприведённого квадратного уравнения, используя теорему Виета. После этого на доску выносится запись:

### Теорема Виета

Если  $x_1, x_2$  – корни уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ ,

$$\text{то } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

## 3. Теорема, обратная теореме Виета.

Обращаем внимание учащихся, что по теореме Виета мы можем только убедиться в правильности нахождения корней с помощью дискриминанта. Возникает вопрос: а если мы подберем такие числа, которые в сумме будут равны второму коэффициенту с противоположным знаком, а в произведении – свободному члену, то не будут ли они являться корнями уравнения? Подчеркиваем, что мы хотим воспользоваться утверждением, обратным теореме Виета, значит, мы должны его доказать. Работа с теоремой Виета и обратной ей теоремой позволяет формировать элементы математической культуры учащихся.

После рассмотрения (по учебнику) доказательства теоремы привести примеры нахождения корней квадратного уравнения подбором.

## IV. Формирование умений и навыков.

- Все упражнения, выполняемые на этом уроке, можно разбить на две группы:

1-я группа. Упражнения на непосредственное применение теоремы Виета: № 580 (д, е, ж, з) – устно.

2-я группа. Упражнения на нахождение подбором корней приведённого квадратного уравнения: № 581 (а, в), 582 (а, б, г, д).

– Решите квадратное уравнение по формуле и сделайте проверку, используя теорему Виета:

а)  $x^2 + 7x - 8 = 0$ ;

в)  $x^2 - 4x - 5 = 0$ ;

б)  $x^2 - 5x - 14 = 0$ ;

г)  $x^2 + 8x + 15 = 0$ .

• Дополнительное задание: № 583 (а, в).

– Найдите подбором корни уравнения:

а)  $x^2 - 11x + 28 = 0$ ;

г)  $x^2 + 3x - 28 = 0$ ;

б)  $x^2 + 11x + 28 = 0$ ;

д)  $x^2 + 20x + 36 = 0$ ;

в)  $x^2 - 3x - 28 = 0$ ;

е)  $x^2 + 37x + 36 = 0$ .

## V. Проверочная работа.

Каждое из следующих уравнений имеет по два корня:  $x_1$  и  $x_2$ .

Не находя их, найдите значение выражений  $x_1 + x_2$  и  $x_1 \cdot x_2$ :

### Вариант 1

а)  $x^2 - 7x - 9 = 0$ ;

в)  $5x^2 - 7x = 0$ ;

б)  $2x^2 + 8x - 19 = 0$ ;

г)  $13x^2 - 25 = 0$ .

### Вариант 2

а)  $x^2 + 8x - 11 = 0$ ;

в)  $4x^2 + 9x = 0$ ;

б)  $3x^2 - 7x - 12 = 0$ ;

г)  $17x^2 - 50 = 0$ .

## VI. Итоги урока.

– Сформулируйте теорему Виета.

– Что необходимо проверить, прежде чем находить сумму и произведение корней приведённого квадратного уравнения?

– Как можно применить теорему Виета для неприведённого квадратного уравнения?

– В чём состоит теорема, обратная теореме Виета? Когда она применяется?

Домашнее задание: № 581 (б, г), 582 (в, е), 583 (б, г), 584.

Дополнительно: найти подбором корни уравнения:

а)  $x^2 - 12x + 27 = 0$ ;

в)  $x^2 + 9x - 36 = 0$ ;

б)  $x^2 + 6x - 27 = 0$ ;

г)  $x^2 - 35x - 36 = 0$ .

## Урок 54

### ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ВИЕТА И ОБРАТНОЙ ЕЙ ТЕОРЕМЫ

**Цель:** продолжить формирование умения применять теорему Виета и обратную ей теорему при решении приведённых и неприведённых квадратных уравнений.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Устная работа.

Убедитесь, что уравнение имеет корни, и назовите их сумму и произведение:

а)  $x^2 - 12x - 45 = 0$ ;

д)  $x^2 - 27x = 0$ ;

б)  $y^2 + 17y + 60 = 0$ ;

е)  $60z + z^2 = 0$ ;

в)  $3y - 40 + y^2 = 0$ ;

ж)  $3x^2 - 15x + 18 = 0$ ;

г)  $x^2 - 2x + 16 = 0$ ;

з)  $x^2 + x + 8 = 0$ .

##### III. Проверочная работа.

#### Вариант 1

1. Зная один из корней уравнения, найдите другой корень, используя теорему Виета:

а)  $x^2 - 3x - 18 = 0$ ;  $x_1 = -3$ ;

б)  $2x^2 - 5x + 2 = 0$ ;  $x_1 = 2$ .

2. Какое число надо подставить вместо  $a$ , чтобы корнями уравнения  $x^2 - ax + 6 = 0$  были бы числа 2 и 3?

#### Вариант 2

1. Зная один из корней уравнения, найдите другой корень, используя теорему Виета:

а)  $x^2 - 4x - 21 = 0$ ;  $x_1 = -3$ ;

б)  $2x^2 - 7x + 6 = 0$ ;  $x_1 = 2$ .

2. Какое число надо подставить вместо  $a$ , чтобы корнями уравнения  $x^2 - 5x + a = 0$  были бы числа 2 и 3?

#### IV. Формирование умений и навыков.

На этом уроке учащиеся решают приведённые и неприведённые квадратные уравнения с помощью теоремы, обратной теореме Виета.

На первых порах учащимся может быть трудно подбирать корни устно, поэтому стоит предложить им обозначать корни уравнения и записывать соответствующие равенства.

Обратить внимание учащихся, что подбор корней начинаем с оценивания произведения корней, то есть находим делители свободного члена квадратного уравнения.

- Выполнение заданий по учебнику.

##### № 586.

Пусть  $x_1 = 12,5$  и  $x_2$  – корни уравнения  $x^2 - 13x + q = 0$ , тогда  $x_1 + x_2 = 13$  и  $x_1 \cdot x_2 = q$ .

Имеем  $12,5 + x_2 = 13$ , значит,  $x_2 = 13 - 12,5$ ,  $x_2 = 0,5$ .

Тогда  $12,5 \cdot 0,5 = q$ ,  $q = 25$ .

Ответ:  $x_2 = 0,5$ ;  $q = 25$ .

##### № 587.

Пусть  $x_1 = 8$  и  $x_2$  – корни уравнения  $5x^2 + bx + 24 = 0$ ,

тогда  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{5}$ ,  $x_1 \cdot x_2 = \frac{24}{5}$ .

Имеем  $8 \cdot x_2 = \frac{24}{5}$ , значит,  $x_2 = \frac{3}{5}$ .

Тогда  $8 + \frac{3}{5} = -\frac{b}{5}$ ,  $8,6 = -0,2 \cdot b$ ,  $b = -43$ .

Ответ:  $x_2 = 0,6$ ;  $b = -43$ .

№ 589, 590 (самостоятельно).

№ 593 (а), 594 (а, д, е), 595 (б, д, е), 675.

После выполнения задания № 675 можно рассмотреть с учащимися два способа нахождения корней квадратного уравнения, вытекающие из теоремы Виета.

1-й способ. Если в квадратном уравнении  $ax^2 + bx + c = 0$  сумма коэффициентов равна нулю, то  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{c}{a}$ .

2-й способ. Если в квадратном уравнении  $ax^2 + bx + c = 0$  сумма коэффициентов  $a$  и  $c$  равна коэффициенту  $b$ , то  $x_1 = -1$ ,  
 $x_2 = -\frac{c}{a}$ .

В буквенном виде это может быть записано так:

| $ax^2 + bx + c = 0$   |   |
|---|---|
| Если $a + b + c = 0$ , то<br>$x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{c}{a}$ | Если $a + c = b$ , то<br>$x_1 = -1; \quad x_2 = -\frac{c}{a}$ |

• Дополнительное задание повышенной трудности.

### № 591.

Пусть  $x_1, x_2$  – корни уравнения  $x^2 + 2x + q = 0$ .

По теореме Виета  $x_1 + x_2 = -2$  (1) и  $x_1 \cdot x_2 = q$  (2).

По условию  $x_1^2 - x_2^2 = 12$  (через  $x_1$  обозначим больший корень). Значит, по формуле сокращенного умножения

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 12,$$

$$(x_1 - x_2) \cdot (-2) = 12,$$

$$x_1 - x_2 = -6,$$

$$x_1 = x_2 - 6.$$

Подставим в первое равенство вместо  $x_1$  его значение:

$$x_2 - 6 + x_2 = -2,$$

$$2x_2 = 4,$$

$$x_2 = 2.$$

$$\text{Вычислим } x_1 = 2 - 6 = -4.$$

Из второго равенства найдём  $q = -4 \cdot 2, q = 8$ .

Ответ:  $q = 8$ .

### V. Итоги урока.

– Сформулируйте теорему Виета и обратную ей теорему.

– Если коэффициент  $c$  квадратного уравнения является положительным числом, то какими по знаку могут быть его корни? А если  $c$  – отрицательное число?

– Какие корни имеет квадратное уравнение, если сумма его коэффициентов равна нулю? А если  $a + c = b$ ?

**Домашнее задание:** № 585, 588, 594 (б, в, г), 595 (а, в, г), 592\*.



## Урок 55

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 5

#### Вариант 1

1. Решите уравнение:

а)  $2x^2 + 7x - 9 = 0$ ;

в)  $100x^2 - 16 = 0$ ;

б)  $3x^2 = 18x$ ;

г)  $x^2 - 16x + 63 = 0$ .

2. Периметр прямоугольника равен 20 см. Найдите его стороны, если известно, что площадь прямоугольника равна  $24 \text{ см}^2$ .

3. В уравнении  $x^2 + px - 18 = 0$  один из его корней равен  $-9$ . Найдите другой корень и коэффициент  $p$ .

#### Вариант 2

1. Решите уравнение:

а)  $3x^2 + 13x - 10 = 0$ ;

в)  $16x^2 = 49$ ;

б)  $2x^2 - 3x = 0$ ;

г)  $x^2 - 2x - 35 = 0$ .

2. Периметр прямоугольника равен 30 см. Найдите его стороны, если известно, что площадь прямоугольника равна  $56 \text{ см}^2$ .

3. Один из корней уравнения  $x^2 + 11x + q = 0$  равен  $-7$ . Найдите другой корень и свободный член  $q$ .

#### Вариант 3

1. Решите уравнение:

а)  $7x^2 - 9x + 2 = 0$ ;

в)  $7x^2 - 28 = 0$ ;

б)  $5x^2 = 12x$ ;

г)  $x^2 + 20x + 91 = 0$ .

2. Периметр прямоугольника равен 26 см, а его площадь  $36 \text{ см}^2$ . Найдите длины сторон прямоугольника.

3. В уравнении  $x^2 + px + 56 = 0$  один из его корней равен  $-4$ . Найдите другой корень и коэффициент  $p$ .

#### Вариант 4

1. Решите уравнение:

а)  $9x^2 - 7x - 2 = 0$ ;

в)  $5x^2 = 45$ ;

б)  $4x^2 - x = 0$ ;

г)  $x^2 + 18x - 63 = 0$ .

2. Периметр прямоугольника равен 22 см, а его площадь 24 см<sup>2</sup>. Найдите длины сторон прямоугольника.

3. Один из корней уравнения  $x^2 - 7x + q = 0$  равен 13. Найдите другой корень и свободный член  $q$ .

## РЕШЕНИЕ ВАРИАНТОВ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

### В а р и а н т 1

1. а)  $2x^2 + 7x - 9 = 0$ .

1-й способ.  $D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 49 + 72 = 121, D > 0, 2$  корня.

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 + 11}{4} = \frac{4}{4} = 1;$$

$$x_2 = \frac{-7 - \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 - 11}{4} = -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2} = -4,5.$$

2-й способ.  $a + b + c = 0$ ,

значит,  $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$ , то есть  $x_1 = 1, x_2 = \frac{-9}{2} = -4,5$ .

б)  $3x^2 = 18x$ .

$$3x^2 - 18x = 0,$$

$$3x(x - 6) = 0,$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = 6.$$

в)  $100x^2 - 16 = 0$ ,

$$100x^2 = 16,$$

$$x^2 = \frac{16}{100}, \quad x^2 = \frac{4}{25}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{4}{25}}, \quad x = \pm \frac{2}{5}, \quad x = \pm 0,4.$$

г)  $x^2 - 16x + 63 = 0$ .

1-й способ.  $D_1 = (-8)^2 - 63 = 64 - 63 = 1, D_1 > 0, 2$  корня.

$$x_1 = 8 + \sqrt{1} = 9; \quad x_2 = 8 - \sqrt{1} = 7.$$

2-й способ. По теореме, обратной теореме Виета, имеем:

$$x_1 + x_2 = 16, \quad x_1 \cdot x_2 = 63. \text{ Подбором получаем } x_1 = 9, x_2 = 7.$$

Ответ: а)  $-4,5; 1$ ; б)  $0; 6$ ; в)  $\pm 0,4$ ; г)  $7; 9$ .

2. Пусть  $x$  см – одна сторона прямоугольника, тогда вторая сторона  $\frac{20-2x}{2}$  см, что составляет  $(10-x)$  см. Зная, что площадь прямоугольника равна  $24 \text{ см}^2$ , составим уравнение:

$$x(10-x) = 24,$$

$$10x - x^2 - 24 = 0,$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0,$$

$$D_1 = (-5)^2 - 1 \cdot 24 = 25 - 24 = 1, D_1 > 0, 2 \text{ корня.}$$

$x_1 = 5 + \sqrt{1} = 6$ ;  $x_2 = 5 - \sqrt{1} = 4$ . Оба корня удовлетворяют условию задачи.

Ответ: 4 см; 6 см.

3. Пусть  $x_1 = -9$  и  $x_2$  – корни уравнения  $x^2 + px - 18 = 0$ , тогда по теореме Виета  $-9 + x_2 = -p$  и  $-9 \cdot x_2 = -18$ .

$$\text{Имеем: } x_2 = \frac{-18}{-9}; x_2 = 2 \text{ и } -9 + x_2 = -p, \text{ отсюда } p = 7.$$

Ответ:  $x_2 = 2$ ;  $p = 7$ .

## Вариант 2

1. а)  $3x^2 + 13x - 10 = 0$ .

$$D = 13^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10) = 169 + 120 = 289, D > 0, 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{-13 + \sqrt{289}}{2 \cdot 3} = \frac{-13 + 17}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

$$x_2 = \frac{-13 - \sqrt{289}}{2 \cdot 3} = \frac{-13 - 17}{6} = \frac{-30}{6} = -5.$$

б)  $2x^2 - 3x = 0$ .

$$x(2x - 3) = 0,$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad 2x - 3 = 0,$$

$$x = \frac{3}{2},$$

$$x = 1,5.$$

в)  $16x^2 = 49$ .

$$x^2 = \frac{49}{16}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{49}{16}}, \quad x = \pm \frac{7}{4}, \quad x = \pm 1,75.$$

$$\text{г) } x^2 - 2x - 35 = 0.$$

$$D_1 = (-1)^2 - 1 \cdot (-35) = 1 + 35 = 36, D_1 > 0, 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{36} = 1 + 6 = 7;$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{36} = 1 - 6 = -5.$$

Ответ: а)  $-5$ ;  $\frac{2}{3}$ ; б)  $0$ ;  $1,5$ ; в)  $\pm 1,75$ ; г)  $-5$ ;  $7$ .

2. Пусть  $x$  см – одна сторона прямоугольника, тогда вторая сторона  $\frac{30-2x}{2}$  см, что составляет  $(15-x)$  см. Зная, что площадь прямоугольника равна  $56 \text{ см}^2$ , составим уравнение:

$$x(15-x) = 56,$$

$$15x - x^2 - 56 = 0,$$

$$x^2 - 15x + 56 = 0,$$

$$D = (-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 56 = 225 - 224 = 1, D > 0, 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{15 + \sqrt{1}}{2} = \frac{16}{2} = 8; \quad x_2 = \frac{15 - \sqrt{1}}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

Оба корня удовлетворяют условию задачи.

Ответ:  $7$  см;  $8$  см.

3. Пусть  $x_1 = -7$  и  $x_2$  – корни уравнения  $x^2 + 11x + q = 0$ , тогда по теореме Виета,  $-7 + x_2 = -11$  и  $-7 \cdot x_2 = q$ .

Имеем:  $x_2 = -11 + 7$ ,  $x_2 = -4$  и  $-7 \cdot (-4) = q$ , откуда  $q = 28$ .

Ответ:  $x_2 = -4$ ;  $q = 28$ .

### Вариант 3

$$1. \text{ а) } 7x^2 - 9x + 2 = 0.$$

1-й способ.  $D = (-9)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = 81 - 56 = 25, D > 0, 2 \text{ корня.}$

$$x_1 = \frac{9 + \sqrt{25}}{2 \cdot 7} = \frac{9 + 5}{14} = 1; \quad x_2 = \frac{9 - \sqrt{25}}{2 \cdot 7} = \frac{9 - 5}{14} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}.$$

2-й способ.  $a + b + c = 0$ , значит,  $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$ ,

то есть  $x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{7}$ .

$$\text{б) } 5x^2 = 12x.$$

$$5x^2 - 12x = 0,$$

$$x(5x - 12) = 0,$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad 5x - 12 = 0,$$

$$5x = 12,$$

$$x = \frac{12}{5},$$

$$x = 2,4.$$

$$\text{в) } 7x^2 - 28 = 0.$$

$$7x^2 = 28,$$

$$x^2 = 4,$$

$$x = \pm\sqrt{4},$$

$$x = \pm 2.$$

$$\text{г) } x^2 + 20x + 91 = 0.$$

$$D_1 = 10^2 - 1 \cdot 91 = 100 - 91 = 9, D_1 > 0, 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = -10 + \sqrt{9} = -10 + 3 = -7;$$

$$x_2 = -10 - \sqrt{9} = -10 - 3 = -13.$$

Ответ: а)  $1; \frac{2}{7}$ ; б)  $0; 2,4$ ; в)  $\pm 2$ ; г)  $-13; -7$ .

2. Пусть  $x$  см – одна сторона прямоугольника, тогда вторая сторона  $\frac{26-2x}{2}$  см, что составляет  $(13-x)$  см. Зная, что площадь прямоугольника равна  $36 \text{ см}^2$ , составим уравнение:

$$x(13-x) = 36,$$

$$13x - x^2 - 36 = 0,$$

$$x^2 - 13x + 36 = 0,$$

$$D = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 169 - 144 = 25, D > 0, 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{13 + \sqrt{25}}{2} = \frac{13 + 5}{2} = 9; \quad x_2 = \frac{13 - \sqrt{25}}{2} = \frac{13 - 5}{2} = 4.$$

Оба корня удовлетворяют условию задачи.

Ответ: 4 см; 9 см.

3. Пусть  $x_1 = -4$  и  $x_2$  – корни уравнения  $x^2 + px + 56 = 0$ , тогда по теореме Виета  $-4 + x_2 = -p$  и  $-4 \cdot x_2 = 56$ .

Имеем:  $x_2 = \frac{56}{-4}$ ;  $x_2 = -14$  и  $-4 + (-14) = -p$ , отсюда  $p = 18$ .

Ответ:  $x_2 = -14$ ;  $p = 18$ .

#### Вариант 4

1. а)  $9x^2 - 7x - 2 = 0$ .

1-й способ.  $D = (-7)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-2) = 49 + 72 = 121$ ,  $D > 0$ ,  
2 корня.

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{121}}{2 \cdot 9} = \frac{7 + 11}{18} = 1; \quad x_2 = \frac{7 - \sqrt{121}}{2 \cdot 9} = \frac{7 - 11}{18} = \frac{-4}{18} = -\frac{2}{9}.$$

2-й способ.  $a + b + c = 0$ , значит,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{c}{a}$ ,

то есть  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -\frac{2}{9}$ .

б)  $4x^2 - x = 0$ .

$$x(4x - 1) = 0,$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad 5x - 12 = 0,$$

$$4x - 1 = 0,$$

$$4x = 1,$$

$$x = \frac{1}{4},$$

$$x = 0,25.$$

в)  $5x^2 = 45$ .

$$x^2 = \frac{45}{5},$$

$$x^2 = 9,$$

$$x = \pm\sqrt{9},$$

$$x = \pm 3.$$

г)  $x^2 + 18x - 63 = 0$ .

$D_1 = 9^2 - 1 \cdot (-63) = 81 + 63 = 144$ ,  $D_1 > 0$ , 2 корня.

$$x_1 = -9 + \sqrt{144} = -9 + 12 = 3;$$

$$x_2 = -9 - \sqrt{144} = -9 - 12 = -21.$$

Ответ: а)  $-\frac{2}{9}$ ; 1; б) 0; 0,25; в)  $\pm 3$ ; г) -21; 3.

2. Пусть  $x$  см -- одна сторона прямоугольника, тогда вторая сторона  $\frac{22-2x}{2}$  см, что составляет  $(11-x)$  см. Зная, что площадь прямоугольника равна  $24$  см<sup>2</sup>, составим уравнение:

$$x(11-x) = 24,$$

$$11x - x^2 - 24 = 0,$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0,$$

$$D = (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 = 121 - 96 = 25, D > 0, 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{11 + \sqrt{25}}{2} = \frac{11 + 5}{2} = 8;$$

$$x_2 = \frac{11 - \sqrt{25}}{2} = \frac{11 - 5}{2} = 3.$$

Оба корня удовлетворяют условию задачи.

Ответ: 3 см; 8 см.

3. Пусть  $x_1 = 13$  и  $x_2$  -- корни уравнения  $x^2 - 7x + q = 0$ , тогда, по теореме Виета,  $13 + x_2 = 7$  и  $13 \cdot x_2 = q$ .

Имеем:  $x_2 = 7 - 13, x_2 = -6$  и  $13 \cdot (-6) = q$ , откуда  $q = -78$ .

Ответ:  $x_2 = -6; q = -78$ .

## Урок 56

### ПОНЯТИЕ ДРОБНОГО РАЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

**Цели:** ввести понятие дробного рационального уравнения; формировать умение применять алгоритм решения дробного рационального уравнения.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Анализ результатов контрольной работы.

Проанализировать и исправить ошибки, допущенные учащимися при решении контрольной работы. Решить на доске задания, вызвавшие затруднения у учащихся.

### III. Устная работа.

1. Какие из выражений являются целыми, какие – дробными?

а)  $\frac{1}{4}x^2y$ ;

г)  $\frac{8}{m^2 + n^2}$ ;

б)  $(a - b)^2 - 3ab$ ;

д)  $\frac{x^2 - 3xy}{12}$ ;

в)  $\frac{m + 5}{m - 5}$ ;

е)  $(c + 2)^2 + \frac{2}{c}$ .

2. Укажите допустимые значения переменной в выражении:

а)  $2x^2 - 8$ ;

г)  $\frac{y - 1}{y^2 - 4}$ ;

б)  $\frac{3}{x - 2}$ ;

д)  $\frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}$ ;

в)  $\frac{x^2}{x + 3}$ ;

е)  $\frac{8}{y - 5} + \frac{1}{y}$ .

### IV. Объяснение нового материала.

Объяснение следует проводить в несколько этапов.

1. Введение понятия дробного рационального уравнения.

При проведении устной работы необходимо актуализировать следующие знания учащихся: целые выражения, дробные выражения, рациональные выражения, допустимые значения переменных. Целесообразно предложить учащимся самим сформулировать понятие дробного рационального уравнения и акцентировать их внимание на следующем: наличие дроби в выражении не свидетельствует о том, что это дробное выражение (уравнение), необходимо присутствие переменной в знаменателе дроби.

2. Рассмотрение алгоритма решения дробного рационального уравнения.

Рассматривая способ решения дробного рационального уравнения, учащиеся используют приём аналогии: решая целое уравнение с числом в знаменателе, они умножают обе части



уравнения на общий знаменатель, что позволяет избавиться от дробей. Возникает идея применить этот приём для нового вида уравнений. После домножения обеих частей уравнения на общий знаменатель следует спросить учащихся, что произошло с областью допустимых значений уравнения. Она «расширилась», и теперь допустимыми стали любые значения переменных, то есть полученное уравнение не равносильно исходному. Следует задать вопрос: как же следует поступить в этом случае? Затем формулируется алгоритм решения дробного рационального уравнения:

- 1) Найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение.
- 2) Умножить обе части уравнения на общий знаменатель.
- 3) Решить полученное целое уравнение.
- 4) Исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

#### **V. Формирование умений и навыков.**

На этом уроке отрабатывается применение алгоритма решения дробных рациональных уравнений. Не следует предлагать для решения упражнения, требующие преобразование знаменателей по формулам сокращенного умножения перед нахождением общего знаменателя.

#### **№ 600.**

а)  $\frac{y^2}{y+3} = \frac{y}{y+3}$ . Общий знаменатель  $(y+3)$ .

Умножим обе части на общий знаменатель дробей.

$$y^2 = y;$$

$$y^2 - y = 0;$$

$$y(y-1) = 0;$$

$$y = 0 \quad \text{или} \quad y - 1 = 0,$$

$$y = 1.$$

При обоих значениях  $y$  знаменатель не обращается в нуль.

$$в) \frac{2x^2}{x-2} = \frac{-7x+6}{2-x},$$

$$\frac{2x^2}{x-2} = -\frac{-7x+6}{x-2},$$

$$\frac{2x^2}{x-2} = \frac{7x+6}{x-2}. \text{ Общий знаменатель дробей } (x-2).$$

Умножим обе части на общий знаменатель дробей.

$$2x^2 = 7x - 6,$$

$$2x^2 - 7x + 6 = 0,$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 49 - 48 = 1, D > 0, 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2; \quad x_2 = \frac{7 - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Если  $x = 2$ , то  $x - 2 = 0$ .

Если  $x = 1,5$ , то  $x - 2 \neq 0$ .

$$д) \frac{2x-1}{x+7} = \frac{3x+4}{x-1}. \text{ Общий знаменатель дробей } (x+7)(x-1).$$

Умножим обе части на общий знаменатель

$$(2x-1)(x-1) = (3x+4)(x+7),$$

$$2x^2 - 2x - x + 1 = 3x^2 + 21x + 4x + 28 = 0,$$

$$2x^2 - 2x - x + 1 - 3x^2 - 21x - 4x - 28 = 0,$$

$$-x^2 - 28x - 27 = 0,$$

$$x^2 + 28x + 27 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,  $x_1 = -27, x_2 = -1$ .

Если  $x = -27$ , то  $(x+7)(x-1) \neq 0$ .

Если  $x = -1$ , то  $(x+7)(x-1) \neq 0$ .

$$и) \frac{x-1}{2x+3} - \frac{2x-1}{3-2x} = 0;$$

$$\frac{x-1}{2x+3} = \frac{2x-1}{3-2x}. \text{ Общий знаменатель дробей } (2x+3)(3-2x).$$

Умножим обе части на общий знаменатель.

$$(x-1)(3-2x) = (2x-1)(2x+3),$$

$$3x - 2x^2 - 3 + 2x = 4x^2 + 6x - 2x - 3,$$

$$3x - 2x^2 - 3 + 2x - 4x^2 - 6x + 2x + 3 = 0,$$

$$-6x^2 + x = 0,$$

$$6x^2 - x = 0,$$

$$x(6x - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad 6x - 1 = 0,$$

$$6x = 1,$$

$$x = \frac{1}{6}.$$

Если  $x = 0$ , то  $(2x + 3)(3 - 2x) \neq 0$ .

Если  $x = \frac{1}{6}$ , то  $(2x + 3)(3 - 2x) \neq 0$ .

Ответ: а) 0; 1; в) 1,5; д) -27; -1; и) 0;  $\frac{1}{6}$ .

### № 601.

Можно предложить учащимся другой способ исключения посторонних корней. Как уже говорилось, при домножении обеих частей уравнения на общий знаменатель дробей мы изменяем область допустимых значений выражений, входящих в запись уравнения. Можно тогда вначале определить ОДЗ (любые числа, кроме тех, которые обращают знаменатель в нуль), а в конце проверить, входят полученные корни в ОДЗ или нет.

$$\text{а) } \frac{2x - 5}{x + 5} - 4 = 0; \quad \text{ОДЗ: } x + 5 \neq 0, \quad x \neq -5.$$

$$2x - 5 - 4(x + 5) = 0,$$

$$2x - 5 - 4x - 20 = 0,$$

$$-2x - 25 = 0,$$

$$-2x = 25,$$

$$x = -12,5.$$

$$\text{в) } \frac{x^2 - 4}{4x} = \frac{3x - 2}{2x}; \quad \text{ОДЗ: } x \neq 0.$$

$$x^2 - 4 = 2(3x - 2),$$

$$x^2 - 4 = 6x - 4,$$

$$x^2 - 6x = 0,$$

$$x(x - 6) = 0,$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x - 6 = 0,$$

$$x = 6.$$

$$\text{г) } \frac{10}{2x-3} = x-1; \quad \text{ОДЗ: } 2x-3 \neq 0, \quad x \neq 1,5.$$

$$\begin{aligned} 10 &= (x-1)(2x-3), \\ 10 &= 2x^2 - 3x - 2x + 3, \\ 10 - 2x^2 + 3x + 2x - 3 &= 0, \\ -2x^2 + 5x + 7 &= 0, \\ 2x^2 - 5x - 7 &= 0, \end{aligned}$$

$$a+c=b, \text{ значит, } x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}, \text{ т. е. } x_1 = -1; x_2 = -\frac{7}{2} = 3,5.$$

О т в е т : а) – 12,5; в) 6; г) – 1; 3,5.

### № 602.

$$\text{а) } \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{7x}{x^2+1}; \quad \text{ОДЗ: } x^2+1 \neq 0, \quad x - \text{любое.}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= 7x, \\ x^2 - 7x &= 0, \\ x(x-7) &= 0, \\ x=0 \quad \text{или} \quad x-7 &= 0, \\ & x=7. \end{aligned}$$

$$\text{е) } \frac{3}{x^2+2} = \frac{1}{x}; \quad \text{ОДЗ: } x \neq 0.$$

$$\begin{aligned} 3x &= x^2 + 2, \\ 3x - x^2 - 2 &= 0, \\ x^2 - 3x + 2 &= 0, \end{aligned}$$

По теореме, обратной теореме Виета,  $x_1 = 2; x_2 = 1$ .

О т в е т : а) 0; 7; е) 1; 2.

### VI. Итоги урока.

- Какое уравнение называется дробно рациональным?
- Приведите примеры целого и дробного уравнения.
- Сформулируйте алгоритм решения дробного рационального уравнения.
- Какими способами можно исключить «посторонние» корни дробного рационального уравнения?

**Домашнее задание:** № 600 (б, г, е), 601 (б, е, з), 602 (в, д, ж).

## Урок 57

### РЕШЕНИЕ ДРОБНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Цель:** продолжить формирование умения решать дробные рациональные уравнения по алгоритму.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Устная работа.

1. Разложите на множители:

а)  $a^2 - 9$ ;

г)  $2x^3 - 8x$ ;

б)  $x^2 + 2x + 1$ ;

д)  $9y^2 - 1$ ;

в)  $3x^2 - 6x$ ;

е)  $-x^2 + 6x - 9$ .

2. Решите уравнение:

а)  $\frac{x+5}{x-4} = 0$ ;

в)  $\frac{y^2}{y+3} = \frac{y}{y+3}$ ;

б)  $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$ ;

г)  $\frac{z^2}{z-3} = \frac{3z}{z-3}$ .

##### III. Проверочная работа.

###### Вариант 1

Решите уравнения:

1)  $\frac{3x-x^2}{2} + \frac{2x^2-x}{6} = x$ ;

2)  $\frac{2x^2+3x}{3-x} = \frac{x-x^2}{x-3}$ ;

3)  $\frac{5x-7}{x-3} = \frac{4x-3}{x}$ .

###### Вариант 2

Решите уравнения:

1)  $\frac{x^2+3x}{2} + \frac{x-3x^2}{8} = 2x$ ;

2)  $\frac{x^2+3x}{x-4} = \frac{x^2-x}{4-x}$ ;

3)  $\frac{2x+3}{x+2} = \frac{3x+2}{x}$ .

#### IV. Формирование умений и навыков.

На этом уроке отрабатывается умение находить общий знаменатель дробей, выполнив предварительно разложение знаменателей дробей, входящих в уравнение, вынесением общего множителя либо по формулам сокращенного умножения.

##### № 603.

$$а) \frac{3x+1}{x+2} - \frac{x-1}{x-2} = 1;$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq -2; \quad x \neq 2.$$

$$(3x+1)(x-2) - (x-1)(x+2) = 1 \cdot (x+2)(x-2),$$

$$3x^2 - 6x + x - 2 - x^2 - 2x + x + 2 = x^2 - 4,$$

$$3x^2 - 6x + x - 2 - x^2 - 2x + x + 2 - x^2 + 4 = 0,$$

$$x^2 - 6x + 4 = 0.$$

$$D_1 = (-3)^2 - 1 \cdot 4 = 9 - 4 = 5, \quad D_1 > 0, \quad 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = 3 + \sqrt{5}; \quad x_2 = 3 - \sqrt{5}.$$

$$в) \frac{4}{9y^2-1} - \frac{4}{3y+1} = \frac{5}{1-3y};$$

$$\frac{4}{(3y-1)(3y+1)} - \frac{4}{3y+1} = \frac{-5}{3y-1}; \quad \text{ОДЗ: } y \neq -\frac{1}{3}; \quad y \neq \frac{1}{3}.$$

$$4 - 4(3y-1) = -5(3y+1),$$

$$4 - 12y + 4 = -15y - 5,$$

$$3y = -13,$$

$$y = -\frac{13}{3}, \quad y = -4\frac{1}{3}.$$

$$г) \frac{4}{x+3} - \frac{5}{3-x} = \frac{1}{x-3} - 1;$$

$$\frac{4}{x+3} + \frac{5}{x-3} - \frac{1}{x-3} + 1 = 0;$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq -3; \quad x \neq 3.$$

$$\frac{4}{x+3} + \frac{4}{x-3} + 1 = 0,$$

$$4(x-3) + 4(x+3) + (x+3)(x-3) = 0,$$

$$4x - 12 + 4x + 12 + x^2 - 9 = 0,$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,  $x_1 = -9$ ,  $x_2 = 1$ .

Ответ: а)  $3 - \sqrt{5}$ ;  $3 + \sqrt{5}$ ; в)  $-4\frac{1}{3}$ ; г)  $-9$ ; 1.

**№ 605.**

$$\text{б) } \frac{1}{2-x} - 1 = \frac{1}{x-2} - \frac{6-x}{3x^2-12};$$

$$\frac{-1}{x-2} - 1 - \frac{1}{x-2} + \frac{6-x}{3(x^2-4)} = 0,$$

$$\frac{-2}{x-2} - 1 + \frac{6-x}{3(x-2)(x+2)} = 0; \quad \text{ОДЗ: } x \neq 2; \quad x \neq -2.$$

$$-2 \cdot 3 \cdot (x+2) - 1 \cdot 3 \cdot (x-2)(x+2) + 6 - x = 0,$$

$$-6x - 12 - 3x^2 + 12 + 6 - x = 0,$$

$$-3x^2 - 7x + 6 = 0,$$

$$3x^2 + 7x - 6 = 0,$$

$$D = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 49 + 72 = 121, \quad D > 0, \quad 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{121}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 + 11}{6} = \frac{2}{3}; \quad x_2 = \frac{-7 - \sqrt{121}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 - 11}{6} = -3.$$

$$\text{е) } \frac{5x+7}{x-2} - \frac{2x+21}{x+2} = 8\frac{2}{3};$$

$$\frac{5x+7}{x-2} - \frac{2x+21}{x+2} = \frac{26}{3}; \quad \text{ОДЗ: } x \neq 2; \quad x \neq -2.$$

$$3(5x+7)(x+2) - 3(2x+21)(x-2) = 26(x-2)(x+2),$$

$$3(5x^2 + 10x + 7x + 14) - 3(2x^2 - 4x + 21x - 42) - 26(x^2 - 4) = 0,$$

$$15x^2 + 51x + 42 - 6x^2 - 51x + 126 - 26x^2 + 104 = 0,$$

$$-17x^2 + 272 = 0,$$

$$x^2 = 16,$$

$$x = \pm 4.$$

Ответ: б)  $-3$ ;  $\frac{2}{3}$ ; е)  $\pm 4$ .

**№ 604 (б).**

$$1) \frac{x^2 + x - 2}{x + 3} = -10;$$

ОДЗ:  $x \neq -3$ .

$$x^2 + x - 2 = -10(x + 3),$$

$$x^2 + x - 2 = -10x - 30,$$

$$x^2 + 11x + 28 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,  $x_1 = -4$ ;  $x_2 = -7$ .

$$2) \frac{x^2 + x - 2}{x + 3} = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,  $x_1 = -2$ ;  $x_2 = 1$ .

$$3) \frac{x^2 + x - 2}{x + 3} = -5;$$

$$x^2 + x - 2 = -5(x + 3),$$

$$x^2 + x - 2 + 5x + 15 = 0,$$

$$x^2 + 6x + 13 = 0,$$

$$D_1 = 3^2 - 1 \cdot 13 = 9 - 13 = -4, D_1 < 0, \text{ нет корней.}$$

Ответ: 1) при  $x = -4$  или  $x = -7$ ; 2) при  $x = -2$  или  $x = 1$ ;

3) нет решений.

**№ 606.**

$$б) \frac{5y + 13}{5y + 4} - \frac{4 - 6y}{3y - 1} = 3; \quad \text{ОДЗ: } y \neq -\frac{4}{5}; \quad y \neq \frac{1}{3}.$$

$$(5y + 13)(3y - 1) - (4 - 6y)(5y + 4) = 3(5y + 4)(3y - 1),$$

$$15y^2 - 5y + 39y - 13 - 20y - 16 + 30y^2 + 24y =$$

$$= 3(15y^2 - 5y + 12y - 4),$$

$$17y = 17,$$

$$y = 1.$$

$$в) \frac{y + 1}{y - 5} + \frac{10}{y + 5} = \frac{y + 1}{y - 5} \cdot \frac{10}{y + 5}; \quad \text{ОДЗ: } y \neq 5; \quad y \neq -5.$$

$$(y + 1)(y + 5) + 10(y - 5) = 10(y + 1),$$

$$y^2 + 6y + 5 + 10y - 50 - 10y - 10 = 0,$$

$$y^2 + 6y - 55 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,  $y_1 = 5$ ;  $y_2 = -11$ .

Ответ: б) 1; в) -11.



**№ 607.**

$$\text{г) } \frac{10}{y^3 - y} + \frac{1}{y - y^2} = \frac{1}{1 + y}.$$

$$\frac{10}{y(y^2 - 1)} + \frac{-1}{y(y-1)} - \frac{1}{y+1} = 0,$$

$$\frac{10}{y(y-1)(y+1)} - \frac{1}{y(y-1)} - \frac{1}{y+1} = 0; \quad \text{ОДЗ: } y \neq 0; y \neq 1;$$

$$y \neq -1.$$

$$10 - (y+1) - y(y-1) = 0,$$

$$10 - y - 1 - y^2 + y = 0,$$

$$9 - y^2 = 0,$$

$$y^2 = 9,$$

$$y = \pm 3.$$

$$\text{д) } 1 + \frac{45}{x^2 - 8x + 16} = \frac{14}{x - 4}.$$

$$1 + \frac{45}{(x-4)(x-4)} - \frac{14}{x-4} = 0; \quad \text{ОДЗ: } x \neq 4.$$

$$x^2 - 8x + 16 + 45 - 14(x-4) = 0,$$

$$x^2 - 22x + 117 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,  $x_1 = 9$ ,  $x_2 = 13$ .

Ответ: г)  $\pm 3$ ; д) 9; 13.

**V. Итоги урока.**

– Сформулируйте алгоритм решения дробного рационального уравнения.

– Как находится общий знаменатель дробей, входящих в запись дробно рационального уравнения?

– Какими способами можно исключить «посторонние» корни дробного уравнения?

**Домашнее задание:** № 603 (б, е), 605 (в, г), 606 (а, г), 607 (в, е).

## Урок 58

### РЕШЕНИЕ ДРОБНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Цель:** продолжить формирование умения решать дробные рациональные уравнения по алгоритму.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Устная работа.

1. Найдите подбором корни уравнения:

а)  $x^2 - 2x - 15 = 0$ ;

г)  $x^2 - 29x + 100 = 0$ ;

б)  $x^2 + 5x + 6 = 0$ ;

д)  $x^2 - 6x + 8 = 0$ ;

в)  $x^2 + 7x - 8 = 0$ ;

е)  $x^2 + 15x + 36 = 0$ .

2. Решите уравнение:

а)  $\frac{x-4}{x^2-16} = 0$ ;

в)  $\frac{x^2-49}{x-7} = 0$ ;

б)  $\frac{x^2-25}{x^2+25} = 0$ ;

г)  $\frac{x^2-9}{|x|+3} = 0$ .

##### III. Формирование умений и навыков.

Задания, предлагаемые учащимся на этом уроке, направлены на закрепление умения решать дробные уравнения по алгоритму.

1. Выполнение заданий: № 608 (б, г), 609 (а, б).

**№ 608.**

б)  $\frac{17}{(x-3)(x+4)} - \frac{1}{x-3} = \frac{x}{x+4}$ ;

ОДЗ:  $x \neq 3$ ;  $x \neq -4$ .

$$17 - (x+4) - x(x-3) = 0,$$

$$17 - x - 4 - x^2 + 3x = 0,$$

$$-x^2 + 2x + 13 = 0.$$

$$D_1 = 1 + 13 = 14, D_1 > 0, 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{14}}{-1} = 1 + \sqrt{14}; \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{14}}{-1} = 1 - \sqrt{14}.$$

$$\text{г) } \frac{4}{9x^2-1} + \frac{1}{3x^2-x} = \frac{4}{9x^2-6x+1}.$$

$$\frac{4}{(3x-1)(3x+1)} + \frac{1}{x(3x-1)} = \frac{4}{(3x-1)^2}; \quad \text{ОДЗ: } x \neq \frac{1}{3}; x \neq -\frac{1}{3}.$$

Общий знаменатель дробей  $x(3x-1)^2(3x+1)$ .

$$4x(3x-1) + (3x-1)(3x+1) = 4x(3x+1),$$

$$12x^2 - 4x + 9x^2 - 1 = 12x^2 + 4x,$$

$$9x^2 - 8x - 1 = 0.$$

$$a+b+c=0, \text{ значит, } x_1=1, \quad x_2=\frac{c}{a}, \text{ то есть } x_1=1, \quad x_2=-\frac{1}{9}.$$

$$\text{Ответ: б) } 1-\sqrt{14}; 1+\sqrt{14}; \text{ г) } -\frac{1}{9}; 1.$$

На этом примере наглядно демонстрируем учащимся необходимость разложения знаменателей на множители для последующего «составления» общего знаменателя.

### № 609.

$$\text{а) } \frac{21}{x+1} = \frac{16}{x-2} - \frac{6}{x}; \quad \text{ОДЗ: } x \neq -1; x \neq 0; x \neq 2.$$

$$21x(x-2) = 16x(x+1) - 6(x+1)(x-2),$$

$$21x^2 - 42x = 16x^2 + 16x - 6x^2 + 6x + 12,$$

$$21x^2 - 42x - 16x^2 - 16x + 6x^2 - 6x - 12 = 0,$$

$$11x^2 - 64x - 12 = 0;$$

$$D_1 = (32)^2 - 11 \cdot (-12) = 1024 + 132 = 1156; D_1 > 0, 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{32 + \sqrt{1156}}{11} = \frac{32 + 34}{11} = 6;$$

$$x_2 = \frac{32 - \sqrt{1156}}{11} = \frac{32 - 34}{11} = -\frac{2}{11}.$$

$$\text{б) } \frac{2}{y^2-3y} - \frac{1}{y-3} = \frac{5}{y^3-9y}.$$

$$\frac{2}{y(y-3)} - \frac{1}{y-3} = \frac{5}{y(y-3)(y+3)};$$

$$\text{ОДЗ: } y \neq 0; y \neq 3;$$

$$y \neq -3.$$

$$2(y+3) - y(y+3) - 5 = 0,$$

$$2y + 5 - y^2 - 3y - 5 = 0,$$

$$-y^2 - y = 0,$$

$$y^2 + y = 0,$$

$$y(y+1) = 0,$$

$$y = 0 \quad \text{или} \quad y = -1.$$

Ответ: а)  $-\frac{2}{11}$ ; б)  $-1$ .

– Решите уравнения:

$$1) \frac{7a-6}{a^3+27} = \frac{1}{a^2-3a+9} - \frac{1}{a+3}.$$

$$\frac{7a-6}{(a+3)(a^2-3a+9)} - \frac{1}{a^2-3a+9} + \frac{1}{a+3} = 0; \quad \text{ОДЗ: } a \neq -3.$$

$$7a-6 - (a+3) + a^2 - 3a + 9 = 0,$$

$$7a-6-a-3+a^2-3a+9=0,$$

$$a^2 + 3a = 0,$$

$$a(a+3) = 0,$$

$$a = 0 \quad \text{или} \quad a = -3.$$

Ответ: 0.

$$2) \frac{1}{x^3-x} + \frac{1}{x^3+x} - \frac{2}{x^4-1} = 0.$$

$$\frac{1}{x(x^2-1)} + \frac{1}{x(x^2+1)} - \frac{2}{(x^2-1)(x^2+1)} = 0.$$

Общий знаменатель дробей  $x(x^2-1)(x^2+1)$ .

Домножим обе части уравнения на общий знаменатель:

$$x^2 + 1 + x^2 - 1 - 2x = 0,$$

$$2x^2 - 2x = 0,$$

$$2x(x-1) = 0,$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = 1.$$

Если  $x = 0$ , то  $x(x^2-1)(x^2+1) = 0$ .

Если  $x = 1$ , то  $x(x^2-1)(x^2+1) = 0$ .

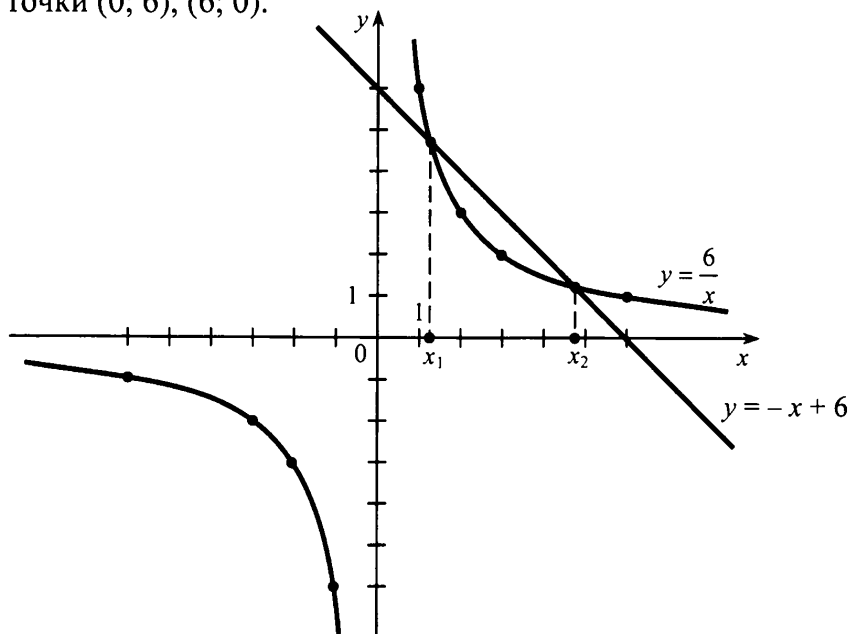
Ответ: нет решений.

№ 611 (б).

Графиком функции  $y = \frac{6}{x}$  является гипербола, расположенная в I и III координатных четвертях. Запишем координаты контрольных точек:

|     |     |   |   |   |   |
|-----|-----|---|---|---|---|
| $x$ | 0,5 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| $y$ | 12  | 6 | 3 | 2 | 1 |

Графиком функции  $y = -x + 6$  является прямая, проходящая через точки  $(0; 6)$ ,  $(6; 0)$ .



Ответ:  $x_1 \approx 1,3$ ;  $x_2 \approx 4,7$ .

• Дополнительные задания повышенной трудности:  
№ 610 (а), 612.

№ 610.

$$а) 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 - x^2}}} = 1 \frac{7}{24}, \quad 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{10 - 2x^2 + 1}{5 - x^2}}} = \frac{31}{24},$$

$$1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 - x^2}} = \frac{31}{24}, \quad 1 + \frac{1}{\frac{33 - 6x^2 + 5 - x^2}{11 - 2x^2}} = \frac{31}{24},$$

$$1 + \frac{11 - 2x^2}{-7x^2 + 38} = \frac{31}{24}, \quad \frac{-7x^2 + 38 + 11 - 2x^2}{-7x^2 + 38} = \frac{31}{24},$$

$$\frac{-9x^2 + 49}{-7x^2 + 38} = \frac{31}{24},$$

$$24(-9x^2 + 49) = 31(-7x^2 + 38),$$

$$-216x^2 + 1176 + 217x^2 - 1178 = 0,$$

$$x^2 = 2,$$

$x = \pm\sqrt{2}$ . Оба корня удовлетворяют уравнению.

Ответ:  $\pm\sqrt{2}$ .

#### IV. Итоги урока.

- Какие уравнения называются дробными рациональными?
- Каков алгоритм решения дробных уравнений?
- Как определить общий знаменатель дробей, входящих в уравнение?
- Каким способом можно исключить «посторонние» корни дробного рационального уравнения?

Домашнее задание: № 608 (а, в), 609 (в), 611 (а), 695 (д, з).

### Урок 59

#### СОСТАВЛЕНИЕ ДРОБНОГО РАЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ

**Цели:** формировать умение составлять дробное рациональное уравнение по условию текстовой задачи и решать его.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Устная работа.

1. Решите уравнение:

а)  $x^2 - 4x + 4 = 0$ ;

г)  $y^2 + 13x + 22 = 0$ ;

б)  $3x^2 + 6 = 0$ ;

д)  $\frac{y^2}{y-3} = \frac{9}{y-3}$ ;

в)  $-2x^2 - 8x = 0$ ;

е)  $\frac{2}{y-3} = \frac{1}{y+1}$ .

2. Заполните таблицу.

| $V$     | $t$    | $S$   |
|---------|--------|-------|
| 60 км/ч | 1,5 ч  |       |
| 5 км/ч  |        | 200 м |
|         | 45 мин | 1 км  |
| 80 км/ч | 15 мин |       |
| 20 м/с  |        | 2 км  |

### III. Проверочная работа.

#### Вариант 1

Найдите корни уравнений:

$$1) \frac{3x^2 + 11x - 4}{3x - 1} = 3;$$

$$2) \frac{7}{x - 3} + 1 = \frac{18}{x^2 - 6x + 9}.$$

#### Вариант 2

Найдите корни уравнений:

$$1) \frac{2x^2 + x - 1}{2x - 1} = 2;$$

$$2) \frac{5}{x - 2} + 1 = \frac{14}{x^2 - 4x + 4}.$$

### IV. Объяснение нового материала.

Учащиеся уже знакомы с алгебраическим методом решения текстовых задач. Единственное отличие от ранее решаемых задач в том, что математической моделью будет являться дробное рациональное уравнение. Это можно продемонстрировать, используя примеры, разобранные в учебнике. При этом основное внимание следует уделять процессу перевода условия задачи на математический язык.

Затем следует ещё раз напомнить учащимся основные этапы решения текстовой задачи алгебраическим методом:

1-й этап. Анализ условия задачи и его схематическая запись.

2-й этап. Перевод естественной ситуации на математический язык (построение математической модели: введение переменной и составление дробного рационального уравнения).

3-й этап. Решение полученного уравнения.

4-й этап. Интерпретация полученного результата.

Первые два этапа являются для учащихся наиболее сложными, поэтому на этом уроке основной целью является формирование у учащихся умения составлять дробное рациональное уравнение по условию задачи.

### V. Формирование умений и навыков.

Большая часть урока должна быть посвящена анализу условий задач, их схематичной записи, обоснованию выбора переменной и составлению уравнений. Решение самих уравнений можно также предлагать учащимся для самостоятельной работы.

#### № 617.

Анализ:  $\boxed{\frac{x}{x+3}} < \boxed{\frac{x+7}{x+3+5}}$  на  $\frac{1}{2}$ .

Пусть  $x$  – числитель обыкновенной дроби, тогда  $(x + 3)$  – её знаменатель. Увеличив числитель на 7, а знаменатель на 5, мы получили дробь  $\frac{x+7}{x+8}$ . Зная, что дробь увеличилась на  $\frac{1}{2}$ , составим уравнение:

$$\frac{x}{x+3} = \frac{x+7}{x+8} - \frac{1}{2}; \quad \text{ОДЗ: } x \neq -3; x \neq -8.$$

Общий знаменатель  $2(x+3)(x+8)$ .

$$2x(x+8) = 2(x+7)(x+3) - (x+3)(x+8),$$

$$2x^2 + 16x = 2x^2 + 20x + 42 - x^2 - 11x - 24,$$

$$x^2 + 7x - 18 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -9$ . Смыслу задачи удовлетворяет только  $x = 2$ , тогда дробь равна  $\frac{2}{5}$ .

Ответ:  $\frac{2}{5}$ .

Обращаем внимание учащихся, что уравнение исходное можно было записать и по-другому:

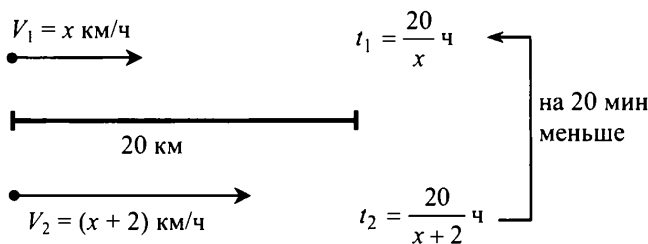


$$\frac{x+7}{x+8} - \frac{x}{x+3} = \frac{1}{2} \quad (\text{из большего значения вычитаем меньшее}$$

и получаем разницу) или  $\frac{x}{x+3} + \frac{1}{2} = \frac{x+7}{x+8}$ .

### № 619.

Анализ:



Пусть  $x$  км/ч – скорость лыжника, тогда  $(x + 2)$  км/ч – скорость второго лыжника. Первый лыжник затратил времени  $\frac{20}{x}$  ч, второй –  $\frac{20}{x + 2}$  ч. Зная, что второй лыжник затратил на 20 мин, или  $\frac{1}{3}$  ч, меньше первого, составим уравнение:

$$\frac{20}{x} - \frac{20}{x + 2} = \frac{1}{3}; \quad \text{ОДЗ: } x \neq 0, x \neq -2.$$

$3x(x + 2)$  – общий знаменатель.

$$60(x + 2) - 60x = x(x + 2),$$

$$60x + 120 - 60x - x^2 - 2x = 0,$$

$$-x^2 - 2x + 120 = 0,$$

$$x^2 + 2x - 120 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,  $x_1 = -12$ ,  $x_2 = 10$ . Корень  $x = -12$  не удовлетворяет условию задачи. Значит, 10 км/ч – скорость второго лыжника.

Ответ: 10 км/ч; 12 км/ч.

**№ 621.**

Анализ:

|                    | $V$ , км/ч | $t$ , ч                            | $S$ , км |
|--------------------|------------|------------------------------------|----------|
| По расписанию      | $x$        | $\frac{720}{x}$ ← на 1 ч<br>меньше | 720      |
| В действительности | $x + 10$   | $\frac{720}{x + 10}$               | 720      |

Пусть  $x$  км/ч – скорость поезда по расписанию, тогда  $(x + 10)$  км/ч – действительная скорость поезда.  $\frac{720}{x}$  ч – время, которое должен был идти поезд по расписанию, а  $\frac{720}{x + 10}$  ч – время, затраченное поездом в действительности. Зная, что поезд затратил на 1 ч меньше, чем должен был по расписанию, составим уравнение:

$$\frac{720}{x} - \frac{720}{x + 10} = 1;$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq 0, x \neq -10.$$

$$720(x + 10) - 720x = x(x + 10),$$

$$720x + 7200 - 720x - x^2 - 10x = 0,$$

$$x^2 + 10x - 7200 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,  $x_1 = -90$ ,  $x_2 = 80$ . Корень  $x = -90$  не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 80 км/ч.

**№ 623.**

Анализ:

|           | Цена, р. | Кол-во, шт.                      | Стоимость, р. |
|-----------|----------|----------------------------------|---------------|
| «Надежда» | $x$      | $\frac{240}{x}$ ← на 4<br>больше | 240           |
| «Удача»   | $x - 5$  | $\frac{240}{x - 5}$              | 240           |

Пусть  $x$  р. – цена лотерейного билета «Надежда», тогда  $(x - 5)$  р. – цена лотерейного билета «Удача». Андрей купил

$\frac{240}{x}$  билетов лотереи «Надежда», и  $\frac{240}{x-5}$  билетов лотереи «Удача» он мог бы купить. Зная, что Андрей мог бы купить на 4 билета лотереи «Удача» больше, составим уравнение:

$$\frac{240}{x-5} - \frac{240}{x} = 4;$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq 5; x \neq 0.$$

$$240x - 240(x-5) = 4x(x-5),$$

$$60x - 60x + 300 - x^2 + 5x = 0,$$

$$x^2 - 5x - 300 = 0,$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-300) = 1225, D > 0, 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{1225}}{2} = \frac{5 + 35}{2} = \frac{40}{2} = 20;$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{1225}}{2} = \frac{5 - 35}{2} = \frac{40}{2} = -15 \text{ – не удовлетворяет усло-}$$

вию задачи.

Ответ: 20 р.

## VI. Итоги урока.

– Каковы этапы решения задач на составление дробного рационального уравнения?

– Каков алгоритм решения дробного рационального уравнения?

– Как проводится интерпретация полученных решений? В каких случаях полученные корни уравнения могут не удовлетворять условию задачи?

Домашнее задание: № 618, 620, 624, 639.

## Урок 60

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ДРОБНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Цель:** формировать умение решать текстовые задачи с помощью дробных рациональных уравнений.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

## II. Устная работа.

Найдите:

а) 50 % от 42;

е) 20 % от 55;

б) 1 % от 300;

ж) 50 % от 31;

в) 2 % от 200;

з) 3 % от 90;

г) 10 % от 35;

и) 10 % от 7;

д) 25 % от 280;

к) 25 % от 84.

## III. Проверочная работа.

### Вариант 1

Числитель обыкновенной дроби на 4 меньше её знаменателя. Если к числителю этой дроби прибавить 19, а к знаменателю 28, то она увеличится на  $\frac{1}{5}$ . Найдите эту дробь.

### Вариант 2

Знаменатель несократимой обыкновенной дроби на 4 больше её числителя. Если числитель этой дроби увеличить на 2, а знаменатель – на 21, то дробь уменьшится на  $\frac{1}{4}$ . Найдите эту дробь.

## IV. Формирование умений и навыков.

На этом уроке следует разнообразить содержание текстовых задач. Следует прорешать задачи на движение; на работу; на концентрацию. Учащимся необходимо продемонстрировать важность этапа анализа условия задачи и удобство и универсальность таблиц и схем для записи связи исходных и требуемых величин.

### № 622.

Анализ:

|             | Урожайность, ц/га | Площадь, га         | Урожайность, ц |
|-------------|-------------------|---------------------|----------------|
| Прошлый год | $x$               | $\frac{192}{x}$     | 192            |
| Этот год    | $x + 2$           | $\frac{192}{x + 2}$ | 192            |

По условию  $\frac{192}{x+2}$  меньше  $\frac{192}{x}$  на 0,4 га.

Пусть  $x$  ц/га – урожайность пшеницы в хозяйстве в прошлом году, тогда  $(x + 2)$  ц/га – урожайность пшеницы в этом году.

В прошлом году под пшеницу занято  $\frac{192}{x}$  га, в этом  $\frac{192}{x+2}$  га.

Зная, что в этом году эта площадь была меньше на 0,4 га, составим уравнение:

$$\frac{192}{x} - \frac{192}{x+2} = 0,4; \quad \text{ОДЗ: } x \neq 0, x \neq -2.$$

$$192(x+2) - 192x = 0,4x(x+2),$$

$$384 - 0,4x^2 - 0,8x = 0,$$

$$x^2 + 2x - 960 = 0,$$

$$D_1 = 1 + 960 = 961, D_1 > 0, 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{961} = -1 + 31 = 30;$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{961} = -1 - 31 = -32 \text{ – не удовлетворяет условию}$$

задачи.

Ответ: 30 ц/га.

### № 625.

Анализ:

|                    | Доля в оплате,<br>шиллинг | Кол-во людей,<br>чел. | Счет (сумма),<br>шиллинг |
|--------------------|---------------------------|-----------------------|--------------------------|
| По плану           | $\frac{175}{x}$           | $x$                   | 175                      |
| В действительности | $\frac{175}{x-2}$         | $x-2$                 | 175                      |

В действительности  $\frac{175}{x-2}$  больше  $\frac{175}{x}$  на 10 шиллингов.

Пусть  $x$  человек обедало, тогда  $(x - 2)$  человек оплачивали поровну весь обед.  $\frac{175}{x}$  шиллингов заплатил бы один человек,

если бы деньги были у всех едоков, а  $\frac{175}{x-2}$  шиллингов заплатил

каждый человек с деньгами в действительности. Зная, что каждому пришлось уплатить на 10 шиллингов больше, составим уравнение:

$$\frac{175}{x-2} - \frac{175}{x} = 10;$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq 0, x \neq 2.$$

$$175x - 175(x-2) = 10x(x-2),$$

$$350 - 10x^2 + 20x = 0,$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0,$$

По теореме, обратной теореме Виета,  $x_1 = 7$ ,  $x_2 = -5$  – не удовлетворяет условию задачи.

О т в е т : 7 человек.

Перед решением задачи № 630 необходимо вспомнить, что такое концентрация вещества в растворе (сплаве, слитке, смеси и т. п.).

$$k = \frac{m_1}{m} \cdot 100\% ,$$

где  $k$  – концентрация вещества в процентах,  $m_1$  – масса вещества,  $m$  – общая масса.

Также необходимо вспомнить, что для содержащегося вещества мы можем указывать как его относительное содержание в растворе (в процентах или в долях), так и абсолютное содержание (в граммах, тоннах, литрах и т. п.). Как правило, в текстовых задачах на концентрацию мы составляем уравнение по зависимости между абсолютным и относительным количеством вещества.

### № 630.

А н а л и з :

|             | Концентрация соли, %         | Масса соли, г | Масса раствора, г |
|-------------|------------------------------|---------------|-------------------|
| 1-й раствор | $\frac{30}{x} \cdot 100$     | 30            | $x$               |
| 2-й раствор | $\frac{30}{x+100} \cdot 100$ | 30            | $x+100$           |

По условию  $\frac{30}{x+100} \cdot 100$  % меньше  $\frac{30}{x} \cdot 100$  % на 1 %.

Пусть  $x$  г – первоначальная масса раствора, тогда  $(x + 100)$  г – масса нового раствора. Концентрация соли первоначально составляла  $\frac{x}{30} \cdot 100$  %, затем стала  $\frac{30}{x+100} \cdot 100$  %. Зная, что концентрация соли снизилась на 1 %, составим уравнение:

$$\frac{30}{x} \cdot 100 - \frac{30}{x+100} \cdot 100 = 1; \quad \text{ОДЗ: } x \neq 0, x \neq -100.$$

$$30(x+100) - 30x = 0,01x(x+100),$$

$$3000 = 0,01x^2 + x,$$

$$0,01x^2 + x - 3000 = 0,$$

$$D = 1 + 4 \cdot 0,01 \cdot 3000 = 121, D > 0, 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{121}}{2 \cdot 0,01} = \frac{-1 + 11}{0,02} = 500;$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{121}}{2 \cdot 0,01} = \frac{-1 - 11}{0,02} = -600 \text{ – не удовлетворяет условию}$$

задачи.

Ответ: 500 г.

Перед решением задач № 627, 629 нужно вынести на доску таблицку:

|                |   |
|----------------|---|
| В стоячей воде | $V = V_{\text{собст}}$                  |
| По течению     | $V = V_{\text{собст}} + V_{\text{теч}}$ |
| Против течения | $V = V_{\text{собст}} - V_{\text{теч}}$ |

В классе только проанализировать условие и составить уравнение. Уравнения дорешать дома.

### № 627.

Анализ:

|                | $V$ , км/ч | $t$ , ч           | $S$ , км |
|----------------|------------|-------------------|----------|
| Против течения | $x - 2$    | $\frac{6}{x - 2}$ | 6        |
| По озеру       | $x$        | $\frac{15}{x}$    | 15       |

По условию  $\frac{15}{x}$  больше  $\frac{6}{x-2}$  на 1 час.

Пусть  $x$  км/ч – собственная скорость лодки, тогда  $(x-2)$  км/ч – скорость лодки при движении против течения.  $\frac{6}{x-2}$  ч турист

плыл на лодке против течения, а  $\frac{15}{x}$  ч – он плыл на лодке по озеру. Зная, что на путь по озеру он затратил на 1 час больше, составим уравнение:

$$\frac{15}{x} - \frac{6}{x-2} = 1;$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq 0, x \neq 2.$$

$$15(x-2) - 6x = x(x-2),$$

$$15x - 30 - 6x - x^2 + 2x = 0,$$

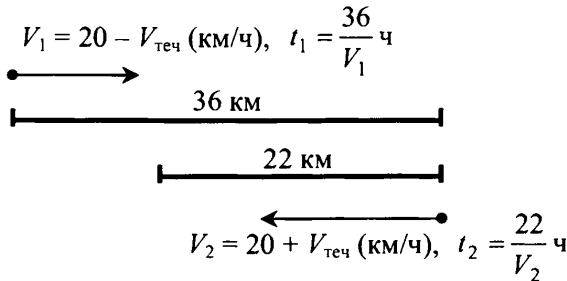
$$x^2 - 11x + 30 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 6$ . Оба корня удовлетворяют условию задачи.

Ответ: 5 км/ч или 6 км/ч.

### № 629.

Анализ:



По условию  $t_1 + t_2 = 3$  ч.

Пусть  $x$  км/ч – скорость течения реки, тогда против течения катер шёл со скоростью  $(20 - x)$  км/ч, а по течению –  $(20 + x)$  км/ч.

Против течения он шёл  $\frac{36}{20-x}$  ч, а по течению  $\frac{22}{20+x}$  ч. Зная,

что на весь путь катер затратил 3 часа, составим уравнение:



$$\frac{36}{20-x} + \frac{22}{20+x} = 3;$$

ОДЗ:  $x \neq 20, x \neq -20$ .

$$36(20+x) + 22(20-x) = 3(20-x)(20+x),$$

$$720 + 36x + 440 - 22x = 1200 - 3x^2,$$

$$3x^2 + 14x - 40 = 0.$$

$$D_1 = 7^2 + 3 \cdot 40 = 49 + 120 = 169, D_1 > 0, 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{169}}{3} = \frac{-7 + 13}{3} = 2;$$

$$x_2 = \frac{-7 - \sqrt{169}}{3} = \frac{-7 - 13}{3} = -\frac{20}{3} \text{ — не удовлетворяет усло-}$$

вию задачи.

Ответ: 2 км/ч.

## V. Итоги урока.

– Назовите основные этапы решения текстовой задачи алгебраическим методом.

– Какие способы схематичной записи условия задачи вы знаете?

– В чём особенности решения задач на концентрацию?

– В чём особенности решения задач на движение, если в тексте идёт речь о движении по реке?

**Домашнее задание:** № 626, 628, 627 (дорешать уравнение), 629 (дорешать уравнение).

## Урок 61

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА СОВМЕСТНУЮ РАБОТУ И ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

**Цели:** продолжить формирование умения решать текстовые задачи с помощью дробных рациональных уравнений; формировать умение решать задачи на совместную работу и задачи повышенной сложности.

## Ход урока

### I. Организационный момент.

### II. Самостоятельная работа.

#### Вариант 1

Теплоход, собственная скорость которого 18 км/ч, прошёл 50 км по течению реки и 8 км против течения, затратив на весь путь 3 ч. Какова скорость течения реки?

#### Вариант 2

Катер прошёл 40 км по течению реки и 6 км против течения, затратив на весь путь 3 ч. Какова собственная скорость катера, если скорость течения 2 км/ч?

### III. Формирование умений и навыков.

Все задачи, решаемые на этом уроке, можно разбить на три группы:

1. Задачи на конкретную работу.
2. Задачи на абстрактную работу.
3. Задачи повышенной трудности.

В задачах на работу фигурируют величины: производительность ( $p$ ), время ( $t$ ) и работа ( $A$ ), связанные формулой  $A = p \cdot t$ . Причём в задачах на конкретную работу мы за  $A$  принимаем конкретное число (количество выточенных деталей, количество напечатанных страниц и т. п.), а в задачах на абстрактную работу принимаем значение  $A$ , равное 1 (заполнен водой бассейн, вспахано поле и т. д.).

Необходимо разъяснить учащимся, что это не искусственный приём.

Каждый участник выполняет часть работы:  $\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{15}$  и т. д.

#### • Решение задач.

**Задача 1.** Две мастерские должны были пошить по 96 курток. Первая мастерскаяшила в день на 4 куртки больше, чем вторая, и потому выполнила заказ на 2 дня раньше. Сколько куртокшила в день каждая мастерская?

Анализ:

|                | $p$ , шт./день | $t$ , день         | $A$ , шт. |
|----------------|----------------|--------------------|-----------|
| 1-я мастерская | $x + 4$        | $\frac{96}{x + 4}$ | 96        |
| 2-я мастерская | $x$            | $\frac{96}{x}$     | 96        |

По условию  $\frac{96}{x}$  больше  $\frac{96}{x + 4}$  на 2 дня.

Пусть 2-я мастерская шьёт в день  $x$  курток, тогда 1-я мастерская в день шьёт  $(x + 4)$  куртки. Первая мастерская выполнит заказ за  $\frac{96}{x + 4}$  дня, а вторая – за  $\frac{96}{x}$  дня. Зная, что первая мастерская шила на 2 дня меньше, составим уравнение:

$$\frac{96}{x} - \frac{96}{x + 4} = 2;$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq 0, x \neq -4.$$

$$96(x + 4) - 96x = 2x(x + 4),$$

$$384 - 2x^2 - 8x = 0,$$

$$x^2 + 4x - 192 = 0;$$

$$D_1 = 2^2 + 192 = 196, D_1 > 0, 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = -2 + \sqrt{196} = -2 + 14 = 12;$$

$$x_2 = -2 - \sqrt{196} = -2 - 14 = -16 \text{ – не удовлетворяет условию задачи.}$$

Значит, вторая мастерская в день шила 12 курток, а первая 16.

Ответ: 16 курток, 12 курток.

### № 632.

Анализ:

|       | $p$               | $t$                                | $A$ |
|-------|-------------------|------------------------------------|-----|
| I, II | $p_1 + p_2$       | 6                                  | 1   |
| I     | $x$               | $\frac{1}{x}$                      | 1   |
| II    | $\frac{1}{6} - x$ | $1 : \left(\frac{1}{6} - x\right)$ | 1   |

По условию задачи  $\frac{1}{x}$  больше  $1: \left(\frac{1}{6} - x\right)$  на 5 часов.

Пусть  $x$  – производительность первого крана, тогда  $\left(\frac{1}{6} - x\right)$  – производительность второго крана. На разгрузку баржи первый кран затратил  $\frac{1}{x}$  часов, второй  $1: \left(\frac{1}{6} - x\right)$ . Зная, что первому крану потребовалось на 5 часов больше, составим уравнение:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{1}{6} - x} = 5, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{1-6x}{6}} = 5,$$

$$\frac{1}{x} - \frac{6}{1-6x} = 5; \quad \text{ОДЗ: } x \neq 0, x \neq \frac{1}{6}.$$

$$1 - 6x - 6x = 5x(1 - 6x),$$

$$1 - 12x - 5x + 30x^2 = 0,$$

$$30x^2 - 17x + 1 = 0;$$

$$D = (-17)^2 - 4 \cdot 30 = 289 - 120 = 169, D > 0, 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{17 + \sqrt{169}}{2 \cdot 30} = \frac{17 + 13}{60} = \frac{1}{2};$$

$$x_2 = \frac{17 - \sqrt{169}}{2 \cdot 30} = \frac{17 - 13}{60} = \frac{1}{15}$$

$x_1 = \frac{1}{2}$  не удовлетворяет условию задачи, так как первый кран в этом случае разгрузит баржу за 2 часа.

Имеем, первый кран разгрузит баржу за 15 часов, а второй – за 10 часов.

О т в е т : 15 часов, 10 часов.

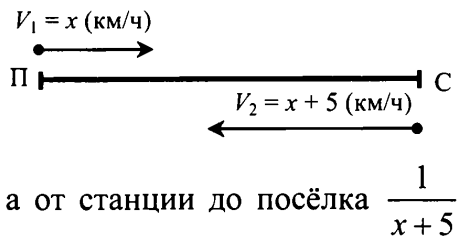
**Задача 2.** Слесарь может выполнить заказ за то же время, что и два ученика, работая вместе. За сколько часов могут выполнить заказ слесарь и каждый из учеников, если слесарь может выполнить его на 2 часа скорее, чем один первый ученик, и на 8 часов скорее, чем один второй?

• Задача повышенной трудности.

№ 634.\*

Анализ:

Пусть  $x$  км/ч – скорость велосипедиста от посёлка до станции. Обозначим этот путь за 1. Тогда от посёлка до станции велосипедист ехал  $\frac{1}{x}$ , а от станции до посёлка  $\frac{1}{x+5}$



часов, значит, всего в пути он был  $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5}\right)$  часов, а весь путь

составил 2. Зная, что средняя скорость на всем пути следования составляла 12 км/ч, получим уравнение:

$$12 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5}\right) = 2,$$

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{x+5} = 1;$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq 0; x \neq -5.$$

$$6(x+5) + 6x = x(x+5),$$

$$6x + 30 + 6x - x^2 - 5x = 0,$$

$$-x^2 + 7x + 30 = 0,$$

$$x^2 - 7x - 30 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,  $x_1 = 10$ ;  $x_2 = -3$  – не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 10 км.

#### IV. Итоги урока.

– Назовите основные этапы решения задачи алгебраическим методом.

– Какие виды задач на работу вы знаете?

– В чём отличие решения задач на конкретную и абстрактную работу?

Домашнее задание: № 633, 695 (а, е), 702.

## Урок 62

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 6

#### Вариант 1

1. Решите уравнение:

а)  $\frac{x^2}{x^2-9} = \frac{12-x}{x^2-9}$ ;      б)  $\frac{6}{x-2} + \frac{5}{x} = 3$ .

2. Из пункта  $A$  в пункт  $B$  велосипедист проехал по одной дороге длиной 27 км, а обратно возвращался по другой дороге, которая была короче первой на 7 км. Хотя на обратном пути велосипедист уменьшил скорость на 3 км/ч, он все же на обратный путь затратил времени на 10 минут меньше, чем на путь из  $A$  в  $B$ . С какой скоростью ехал велосипедист из  $A$  в  $B$ ?

#### Вариант 2

1. Решите уравнение:

а)  $\frac{3x+4}{x^2-16} = \frac{x^2}{x^2-16}$ ;      б)  $\frac{3}{x-5} + \frac{8}{x} = 2$ .

2. Катер прошёл 12 км против течения реки и 5 км по течению. При этом он затратил столько времени, сколько ему потребовалось бы, если бы он шёл 18 км по озеру. Какова собственная скорость катера, если известно, что скорость течения реки равна 3 км/ч?

#### Вариант 3

1. Решите уравнение:

а)  $\frac{x^2}{x^2-1} = \frac{4x+5}{x^2-1}$ ;      б)  $\frac{5}{x-3} - \frac{8}{x} = 3$ .

2. Из пункта  $A$  в пункт  $B$  велосипедист проехал по дороге длиной 48 км, обратно он возвращался по другой дороге, которая короче первой на 8 км. Увеличив на обратном пути скорость на 4 км/ч, велосипедист затратил на 1 час меньше, чем на путь из  $A$  в  $B$ . С какой скоростью ехал велосипедист из пункта  $A$  в пункт  $B$ ?

## Вариант 4

1. Решите уравнение:

$$а) \frac{5x+14}{x^2-4} = \frac{x^2}{x^2-4};$$

$$б) \frac{8}{x-3} - \frac{10}{x} = 2.$$

2. Катер прошёл 15 км против течения и 6 км по течению, затратив на весь путь столько же времени, сколько ему потребовалось бы, если бы он шёл 22 км по озеру. Какова собственная скорость катера, если известно, что скорость течения реки равна 2 км/ч?

### РЕШЕНИЕ ВАРИАНТОВ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

#### Вариант 1

$$1. а) \frac{x^2}{x^2-9} = \frac{12-x}{x^2-9}. \text{ Общий знаменатель } x^2-9.$$

$$x^2 = 12 - x,$$

$$x^2 + x - 12 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,  $x_1 = 3$ ;  $x_2 = -4$ .

Если  $x = 3$ , то  $x^2 - 9 = 0$ .

Если  $x = -4$ , то  $x^2 - 9 \neq 0$ .

$$б) \frac{6}{x-2} + \frac{5}{x} = 3. \text{ Общий знаменатель } x(x-2).$$

$$6x + 5(x-2) = 3x(x-2),$$

$$6x + 5x - 10 - 3x^2 + 6x = 0,$$

$$-3x^2 + 17x - 10 = 0,$$

$$3x^2 - 17x + 10 = 0.$$

$D = (-17)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 289 - 120 = 169$ ,  $D > 0$ , 2 корня.

$$x_1 = \frac{17 + \sqrt{169}}{2 \cdot 3} = \frac{17 + 13}{6} = \frac{30}{6} = 5;$$

$$x_2 = \frac{17 - \sqrt{169}}{2 \cdot 3} = \frac{17 - 13}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Если  $x = 5$ , то  $x(x-2) \neq 0$ .

Если  $x = \frac{2}{3}$ , то  $x(x-2) \neq 0$ .

Ответ: а)  $-4$ ; б)  $\frac{2}{3}$ ; 5.

2. Пусть  $x$  км/ч – скорость велосипедиста, с которой он ехал из  $A$  в  $B$ , тогда  $(x-3)$  км/ч – скорость, с которой он ехал обратно. На путь из  $A$  в  $B$  он затратил  $\frac{27}{x}$  ч, а обратно  $\frac{27-7}{x-3}$  ч. Зная,

что на обратный путь он затратил на 10 мин ( $\frac{1}{6}$  часа) меньше,

составим уравнение:

$$\frac{27}{x} - \frac{20}{x-3} = \frac{1}{6}. \text{ Общий знаменатель } 6x(x-3).$$

$$162(x-3) - 120x - x(x-3) = 0,$$

$$162x - 486 - 120x - x^2 + 3x = 0,$$

$$x^2 - 45x + 486 = 0.$$

$$D = (-45)^2 - 4 \cdot 486 = 81, D > 0, 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{45 + \sqrt{81}}{2} = \frac{45 + 9}{2} = 27;$$

$$x_2 = \frac{45 - \sqrt{81}}{2} = \frac{45 - 9}{2} = 18.$$

Ни один из корней не обращает знаменатель в нуль, но корень  $x = 27$  не удовлетворяет условию задачи (слишком большая скорость для велосипедиста).

Ответ: 18 км/ч.

## Вариант 2

1. а)  $\frac{3x+4}{x^2-16} = \frac{x^2}{x^2-16}$ . Общий знаменатель  $x^2-16$ .

$$3x + 4 = x^2,$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,  $x_1 = 4$ ;  $x_2 = -1$ .

Если  $x = 4$ , то  $x^2 - 16 = 0$ .



Если  $x = -1$ , то  $x^2 - 16 \neq 0$ .

б)  $\frac{3}{x-5} + \frac{8}{x} = 2$ . Общий знаменатель  $x(x-5)$ .

$$3x + 8(x-5) = 2x(x-5),$$

$$3x + 8x - 40 - 2x^2 + 10x = 0,$$

$$-2x^2 + 21x - 40 = 0,$$

$$2x^2 - 21x + 40 = 0.$$

$$D = (-21)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 40 = 441 - 320 = 121, D > 0, 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{21 + \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \frac{21 + 11}{4} = 8;$$

$$x_2 = \frac{21 - \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \frac{21 - 11}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Если  $x = 8$ , то  $x(x-5) \neq 0$ .

Если  $x = 2,5$ , то  $x(x-5) \neq 0$ .

Ответ: а) -1; б) 2,5; 8.

2. Пусть  $x$  км/ч – собственная скорость катера, тогда против течения он шёл со скоростью  $(x - 3)$  км/ч, по течению –  $(x + 3)$  км/ч и по озеру –  $x$  км/ч. Против течения он шёл  $\frac{12}{x-3}$  ч,

по течению  $\frac{5}{x+3}$  ч, а по озеру он шёл бы  $\frac{18}{x}$  ч. Зная, что на все

плавание по реке он затратил бы столько же времени, сколько на плавание по озеру, составим уравнение:

$$\frac{12}{x-3} + \frac{5}{x+3} = \frac{18}{x}. \text{ Общий знаменатель } x(x-3)(x+3).$$

$$12x(x+3) + 5x(x-3) = 18(x-3)(x+3),$$

$$12x^2 + 36x + 5x^2 - 15x - 18x^2 + 162 = 0,$$

$$x^2 - 21x - 162 = 0.$$

$$D = (-21)^2 - 4 \cdot 162 = 441 + 648 = 1089, D > 0, 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = \frac{21 + \sqrt{1089}}{2} = \frac{21 + 33}{2} = 27;$$

$$x_2 = \frac{21 - \sqrt{1089}}{2} = \frac{21 - 33}{2} = -6.$$

Ни один из корней не обращает знаменатель в нуль, но  $x = -6$  не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 27 км/ч.

### Вариант 3

1. а)  $\frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{4x + 5}{x^2 - 1}$ . Общий знаменатель  $x^2 - 1$ .

$$x^2 = 4x + 5,$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,  $x_1 = 5$ ;  $x_2 = -1$ .

Если  $x = 5$ , то  $x^2 - 1 \neq 0$ .

Если  $x = -1$ , то  $x^2 - 1 = 0$ .

б)  $\frac{5}{x-3} - \frac{8}{x} = 3$ . Общий знаменатель  $x(x-3)$ .

$$5x - 8(x-3) = 3x(x-3),$$

$$5x - 8x + 24 - 3x^2 + 9x = 0,$$

$$3x^2 - 6x - 24 = 0,$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,  $x_1 = 4$ ;  $x_2 = -2$ .

Если  $x = 4$ , то  $x(x-3) \neq 0$ .

Если  $x = -2$ , то  $x(x-3) \neq 0$ .

Ответ: а) 5; б) -2; 4.

2. Пусть  $x$  км/ч – скорость, с которой велосипедист ехал из  $A$  в  $B$ , тогда  $(x + 4)$  км/ч – скорость, с которой он ехал обратно.

На путь из  $A$  в  $B$  он затратил  $\frac{48}{x}$  ч, а обратно  $\frac{48-8}{x+4}$  ч. Зная, что

на обратный путь он затратил на 1 ч меньше, составим уравнение:

$$\frac{48}{x} - \frac{40}{x+4} = 1. \text{ Общий знаменатель } x(x+4).$$

$$48(x+4) - 40x - x(x+4) = 0,$$

$$48x + 192 - 40x - x^2 - 4x = 0,$$

$$x^2 - 4x - 192 = 0.$$

$$D_1 = (-2)^2 + 192 = 196, D_1 > 0, 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{196} = 2 + 14 = 16;$$

$$x_2 = 2 - \sqrt{196} = 2 - 14 = -12.$$

Ни один из корней не обращает знаменатель в нуль, но корень  $x = -12$  не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 16 км/ч.

#### Вариант 4

1. а)  $\frac{5x+14}{x^2-4} = \frac{x^2}{x^2-4}$ . Общий знаменатель  $x^2 - 4$ .

$$5x + 14 = x^2,$$

$$x^2 - 5x - 14 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,  $x_1 = 7; x_2 = -2$ .

Если  $x = 7$ , то  $x^2 - 4 \neq 0$ .

Если  $x = -2$ , то  $x^2 - 4 = 0$ .

б)  $\frac{8}{x-3} - \frac{10}{x} = 2$ . Общий знаменатель  $x(x-3)$ .

$$8x - 10(x-3) - 2x(x-3) = 0,$$

$$8x - 10x + 30 - 2x^2 + 6x = 0,$$

$$2x^2 - 4x - 30 = 0,$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,  $x_1 = 5; x_2 = -3$ .

Если  $x = 5$ , то  $x(x-3) \neq 0$ .

Если  $x = -3$ , то  $x(x-3) \neq 0$ .

Ответ: а) 7; б)  $-3; 5$ .

2. Пусть  $x$  км/ч – собственная скорость катера, тогда против течения он шёл со скоростью  $(x-2)$  км/ч, по течению –  $(x+2)$

км/ч и по озеру –  $x$  км/ч. Против течения он шёл  $\frac{15}{x-2}$  ч, по те-

чению  $\frac{6}{x+2}$  ч, а по озеру он шёл бы  $\frac{22}{x}$  ч. Зная, что на все пла-

вание по реке он затратил бы столько же времени, сколько на плавание по озеру, составим уравнение:

$$\frac{15}{x-2} + \frac{6}{x+2} = \frac{22}{x}. \text{ Общий знаменатель } x(x-2)(x+2).$$

$$15x(x+2) + 6x(x-2) - 22(x-2)(x+2) = 0,$$

$$15x^2 + 30x + 6x^2 - 12x - 22x^2 + 88 = 0,$$

$$x^2 - 18x - 8 = 0.$$

$$D_1 = (-9)^2 + 88 = 169, D_1 > 0, 2 \text{ корня.}$$

$$x_1 = 9 + \sqrt{169} = 9 + 13 = 22; \quad x_2 = 9 - \sqrt{169} = 9 - 13 = -4.$$

Ни один из корней не обращает знаменатель в нуль, но корень  $x = -4$  не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 22 км/ч.

## Урок 63

### УРАВНЕНИЕ С ПАРАМЕТРОМ

**Цели:** изучить понятие *уравнение с параметром*; сформировать умение решать линейные и квадратные уравнения с параметром.

#### Ход урока

##### I. Актуализация знаний.

Решить уравнения:

а)  $3x - 15 = 0;$

г)  $2x^2 + 4x - 30 = 0;$

б)  $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 3;$

д)  $x^2 - 6x + 9 = 0;$

в)  $y^2 - (y-3)(y+3) = 9;$

е)  $y^2 - 2y + 8 = 0.$

##### II. Изучение нового материала.

1. Изучение понятия «уравнение с параметром».

Во время актуализации знаний учащиеся вспомнили, что линейное уравнение, в зависимости от коэффициентов, может иметь одно решение, бесконечно много решений либо не иметь решений. Так же квадратное уравнение, в зависимости от дискриминанта, а значит, от коэффициентов, может иметь один корень, два корня либо не иметь корней.

Если уравнение записано в виде равенства двух выражений, в запись которых входят две буквы, например  $ax = 5$ , то нужно четко определить, что это за уравнение. Различают три смысла:

1)  $x$ ,  $a$  – равноценные переменные. Говорят, что задано уравнение с двумя переменными и требуется найти все пары  $(x, a)$ , которые удовлетворяют данному уравнению.

2)  $x$  – переменная,  $a$  – фиксированное число. Говорят, что задано уравнение с одной переменной  $x$  и требуется найти значение  $x$ , удовлетворяющее уравнению при фиксированном значении  $a$ .

3)  $x$  – переменная,  $a$  – любое число из некоторого множества  $A$ . Говорят, что задано уравнение с переменной  $x$  и параметром  $a$  ( $A$  – множество изменения параметра) и требуется решить уравнение относительно  $x$  для каждого значения  $a$ .

Область изменения параметра либо оговаривается заранее, либо обычно подразумевается множество всех действительных чисел.

Тогда задачу решения уравнения с параметром можно переформулировать в задачу решения *семейства* уравнений, получаемых из уравнения при любых действительных значениях параметра.

## 2. Приём решения уравнения с параметром.

Ясно, что выписать каждое уравнение из бесконечного семейства уравнений невозможно. Тем не менее каждое уравнение семейства должно быть решено. Сделать это можно, если по некоторому целесообразному признаку разбить множество всех значений параметра на подмножества и решить затем заданное уравнение на каждом из этих подмножеств.

Для разбиения множества значений параметра на подмножества удобно воспользоваться теми значениями параметра, при которых или при переходе через которые происходят *качественные* изменения уравнения. Такие значения параметра называются *контрольными*.

## 3. Алгоритм решения уравнения с параметром:

1-й шаг. Находим область изменения параметра.

2-й шаг. Находим ОДЗ уравнения.

3-й шаг. Определяем контрольные значения параметра и разбиваем область изменения параметра на подмножества.

4-й шаг. Решаем уравнение на каждом подмножестве области изменения параметра.

5-й шаг. Записываем ответ.

4. Решение линейных и квадратных уравнений с параметром.

На примерах со с. 141–143 учебника рассмотреть, как обнаруживаются контрольные значения параметра, как с их помощью множество значений параметра разбивается на подмножества и как затем на каждом из подмножеств решается заданное линейное или квадратное уравнение.

### III. Формирование умений и навыков.

Все упражнения, относящиеся к этому пункту, можно разбить на 3 группы:

1) решить уравнение с параметром, заданное в стандартном виде: № 641;

2) преобразовать уравнение с параметром и решить его: № 642, 644;

3) найти значения параметра, при которых будет выполняться некоторое условие: № 646.

• Выполнение упражнений по учебнику.

**№ 641 (а).**

$$py - p - 1 = 0$$

Если  $p = 0$ , то уравнение примет вид:  $-1 = 0$ .

Данное уравнение не имеет корней.

$$\text{Если } p \neq 0, \text{ то } py = p + 1; \quad y = \frac{p+1}{p}.$$

$$\text{Ответ: при } p = 0 \text{ нет корней; при } p \neq 0 \quad y = \frac{p+1}{p}.$$

**№ 642.**

$$ax - 2x = a^3 - 2a^2 - 9a + 18,$$

$$x(a-2) = a^2(a-2) - 9(a-2),$$

$$(a-2) \cdot x = (a-2)(a^2 - 9).$$

Если  $a - 2 = 0$ , то есть  $a = 2$ , то  $0 \cdot x = 0 \cdot (2^2 - 9)$ ,

$$0 \cdot x = 0,$$

$x$  – любое.

Если  $a - 2 \neq 0$ , то есть  $a \neq 2$ , то  $x = \frac{(a-2)(a^2-9)}{a-2}$ ,  
 $x = a^2 - 9$ .

Ответ: при  $a = 2$  — любое; при  $a \neq 2$   $x = a^2 - 9$ .

**№ 644 (б).**

$$3x^2 - 10ax + 3a^2 = 0$$

$$D = (-10a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3a^2 = 100a^2 - 36a^2 = 64a^2.$$

Если  $a = 0$ , то  $D = 0$  и  $x = \frac{10a}{2 \cdot 3}; x = 0$ .

Если  $a \neq 0$ , то  $D > 0$  и  $x = \frac{10a \pm \sqrt{64a^2}}{2 \cdot 3}$ ,  
 $x = \frac{10a \pm 8|a|}{6}$ .

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}, \text{ значит, } x = \frac{10a \pm 8a}{6};$$

$$x_1 = \frac{18a}{6} = 3a; \quad x_2 = \frac{2a}{6} = \frac{a}{3}.$$

Ответ: при  $a = 0$ ,  $x = 0$ ; при  $a \neq 0$ ,  $x_1 = 3a$ ,  $x_2 = \frac{a}{3}$ .

**№ 646.**

$$x^2 - ax + a - 3 = 0$$

$$D = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a - 3) = a^2 - 4a + 12 = (a - 2)^2 + 8, D > 0$$

при любом  $a$ , 2 корня.

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{D}}{2}; \quad x_2 = \frac{a - \sqrt{D}}{2};$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{a^2 + 2\sqrt{D} + D + a^2 - 2\sqrt{D} + D}{4} = \frac{2a^2 + 2D}{4} = \frac{a^2 + D}{2},$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{a^2 + a^2 - 4a + 12}{2} = \frac{2a^2 - 4a + 12}{2} =$$

$$= a^2 - 2a + 6 = (a - 1)^2 + 5.$$

$x_1^2 + x_2^2$  принимает наименьшее значение при  $a = 1$  и равно 5.

Ответ: 5 при  $a = 1$ .

## Глава IV. НЕРАВЕНСТВА

### Урок 64

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛОВОГО НЕРАВЕНСТВА

**Цели:** повторить правила сравнения чисел; ввести определение понятия числового неравенства; формировать умение использовать данное определение для сравнения чисел и доказательства неравенств.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Анализ результатов контрольной работы.

1. Объявить результаты контрольной работы, выделить типичные ошибки, допущенные учащимися при её выполнении.

2. Вынести на доску решение заданий, с которыми учащиеся не справились.

##### III. Актуализация знаний.

Необходимо вспомнить с учащимися материал о сравнении действительных чисел. Напоминаем, что геометрически определению понятий «больше» и «меньше» соответствует взаимное расположение точек на координатной прямой: из двух чисел больше то, которое на координатной прямой расположено правее, и меньше то, которое расположено левее. Используя координатную прямую, напоминаем, что всякое отрицательное число меньше нуля. Затем повторяем правила сравнения чисел:

1. Всякое отрицательное число меньше любого положительного числа.

2. Из двух дробей с одинаковым знаменателем больше та, у которой больше числитель.

Отсюда следует, что для сравнения обыкновенных дробей следует вначале привести их к общему знаменателю.

3. Из десятичных дробей больше та, у которой больше целая часть. Если целые части совпадают, то сравниваем в разрядах десятых, сотых, тысячных и т. д., пока не «увидим» большую цифру в разряде.



4. Чтобы сравнить обыкновенную и десятичную дроби, приведём обыкновенную дробь к десятичной и сравним две десятичные дроби.

5. Из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше.

#### IV. Устная работа.

1. Поставьте вместо \* знак =, > или < так, чтобы получилось верное равенство или неравенство:

а)  $-15 * 0$ ;

б)  $3\frac{8}{11} * 0$ ;

в)  $\frac{28}{4} * 2$ ;

г)  $\frac{3}{4} * \frac{7}{8}$ ;

д)  $1,25 * 1\frac{1}{4}$ ;

е)  $0,6 * \frac{3}{7}$ ;

ж)  $-\frac{1}{2} * -\frac{1}{3}$ ;

з)  $-0,07 * -\frac{3}{50}$ ;

и)  $-5,6786 * -5,679$ .

2. Сравните с нулём значение выражения:

а)  $(-6,3)^3$ ;

в)  $0^5$ ;

б)  $(-2,1)^4$ ;

г)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^7$ ;

д)  $\left(-\frac{1}{9}\right)^6$ .

#### V. Объяснение нового материала.

1. После актуализации знаний возникает потребность в таком способе сравнения, который позволил бы охватить все рассмотренные числа. Удобнее и проще всего проводить сравнение числа с нулём, поэтому вводится следующее определение: число  $a$  больше числа  $b$ , если разность  $a - b$  – положительное число; число  $a$  меньше числа  $b$ , если разность  $a - b$  – отрицательное число.

Замечаем, что если разность  $a - b$  равна нулю, то числа  $a$  и  $b$  равны.

2. Рассматриваем рис. 22 на с. 153 ученика и получаем геометрическую интерпретацию нового определения.

3. Разбираем пример 1 на с. 153 учебника. Можно предложить учащимся составить другую разность – между правой и левой частями неравенства. После преобразования получится положительное число. Просим учащихся сделать соответствующий вывод.

## VI. Формирование умений и навыков.

Все задания, решаемые на этом уроке, можно разделить на две группы:

1) на непосредственное применение определения числового неравенства (сравнение чисел): № 724, 725 (устно), 726.

2) на доказательство числовых неравенств (определение верности неравенства при любом значении, входящей в его запись буквы): № 728 (а, б), 729 (а, г), 730 (а, в), 732 (а, б).

- Выполнение заданий по учебнику.

### № 726.

При  $a = -5$ .

$$3a(a+6) = 3 \cdot (-5)(-5+6) = -15,$$

$$(3a+6)(a+4) = (3 \cdot (-5) + 6)(-5+4) = -9,$$

значит,  $3a(a+6) < (3a+6)(a+4)$ .

При  $a = 0$ .

$$3a(a+6) = 3 \cdot 0 \cdot (0+6) = 0,$$

$$(3a+6)(a+4) = (3 \cdot 0 + 6)(0+4) = 24,$$

значит,  $3a(a+6) < (3a+6)(a+4)$ .

При  $a = 40$ .

$$3a(a+6) = 3 \cdot 40(40+6) = 5520,$$

$$(3a+6)(a+4) = (3 \cdot 40 + 6)(40+4) = 5544,$$

значит,  $3a(a+6) < (3a+6)(a+4)$ .

Докажем, что  $3a(a+6) < (3a+6)(a+4)$  при любом значении  $a$ . Составим разность выражений:

$$3a(a+6) - (3a+6)(a+4) = 3a^2 + 18a - 3a^2 - 12a - 6a - 24 = -24.$$

При любом  $a$  рассматриваемая разность отрицательна, значит,  $3a(a+6) < (3a+6)(a+4)$ .

### № 728.

а)  $3(a+1) + a - 4(2+a) = 3a + 3 + a - 8 - 4a = -5 < 0$ , значит, неравенство верно при любом значении  $a$ .

б)  $(7p-1)(7p+1) - 49^2 = 49p^2 - 1 - 49p^2 = -1 < 0$ , значит, неравенство верно при любом значении  $p$ .

**№ 729.**

а)  $2b^2 - 6b + 1 - 2b(b - 3) = 2b^2 - 6b + 1 - 2b^2 + 6b = 1 > 0$ , значит, неравенство верно при любом значении  $b$ .

г)  $8y(3y - 10) - (5y - 8)^2 = 24y^2 - 80y - 25y^2 + 80y - 64 = -y^2 - 64 = -(y^2 + 64) < 0$ , значит, неравенство верно при любом значении  $y$ .

Надо обратить внимание учащихся, что если  $y^2 + 64 > 0$  для любого  $y$ , то противоположное ему по значению выражение  $-(y^2 + 64) < 0$ .

**№ 730.**

а)  $4x(x + 0,25) - (2x + 3)(2x - 3) = 4x^2 + x - 4x^2 + 9 = x + 9$ .

Выражение может быть как положительным, так и отрицательным, и равным нулю в зависимости от  $x$ , значит, неравенство неверно при любых  $x$ .

в)  $(3x + 8)^2 - 3x(x + 16) = 9x^2 + 48x + 64 - 3x^2 - 48x = 6x^2 + 64 > 0$ , значит, неравенство верно при любом значении  $x$ .

**№ 732.**

а)  $10a^2 - 5a + 1 - a^2 - a = 9a^2 - 6a + 1 = (3a - 1)^2 \geq 0$ ,

значит, неравенство верно при любом значении  $a$ .

б)  $50a^2 - 15a + 1 - a^2 + a = 49a^2 - 14a + 1 = (7a - 1)^2 \geq 0$ ,

значит, неравенство верно при любом значении  $a$ .

**VII. Итоги урока.**

– Сформулируйте правила сравнения положительных чисел, отрицательных, разного знака.

– Сформулируйте правила сравнения обыкновенных дробей, десятичных.

– Сформулируйте универсальный способ сравнения чисел. Приведите геометрическую интерпретацию.

**Домашнее задание:** № 727, 728 (в, г), 729 (б, в), 730 (б, г), 745 (а).



2)  $4(x+2) - (x+3)^2 + 2x = 4x + 8 - x^2 - 6x - 9 + 2x = -x^2 - 1 = -(x^2 + 1) < 0$ , значит, неравенство верно при любом значении  $x$ .

### Вариант 2

1)  $(3y-1)(2y+1) - (2y-1)(2+3y) = 6y^2 + y - 2y - 1 - 4y - 6y^2 + 2 + 3y = 1 > 0$ , значит, неравенство верно при любом значении  $y$ .

2)  $(x-5)^2 + 3x - 7(1-x) = x^2 - 10x + 25 + 3x - 7 + 7x = x^2 + 18 > 0$ , значит, неравенство верно при любом значении  $x$ .

### IV. Формирование умений и навыков.

1. Разобрать пример 2 со с. 153–154 учебника.

2. Выполнить задания № 731 (а, в), 733, 735 (б), 736 (а), 737.

#### № 731.

а)  $a(a+b) - ab = a^2 + ab - ab = a^2 \geq 0$  при любом значении  $a$ , значит, неравенство верное.

в)  $2bc - b^2 - c^2 = -(b^2 - 2bc + c^2) = -(b-c)^2 \leq 0$  при любых значениях  $b$  и  $c$ , значит, неравенство верное.

#### № 733.

$$\begin{aligned} \frac{a+2}{a} - 2 - 2 + \frac{a+2}{2} &= \frac{2(a+2) - 4 \cdot 2a + a(a+2)}{2a} = \\ &= \frac{(a+2)(a+2) - 8a}{2a} = \frac{a^2 + 4a + 4 - 8a}{2a} = \frac{a^2 - 4a + 4}{2a} = \\ &= \frac{(a-2)^2}{2a} \geq 0 \text{ при } a > 0 \text{ (так как } (a-2)^2 \geq 0 \text{ и } a > 0), \text{ значит,} \end{aligned}$$

неравенство верное при любом положительном  $a$ .

#### № 735.

$$\text{б) } \frac{c}{c^2+1} - \frac{1}{2} = \frac{2c - c^2 - 1}{2(c^2+1)} = \frac{-(c^2 - 2c + 1)}{2(c^2+1)} = -\frac{(c-1)^2}{2(c^2+1)} \leq 0 \text{ (так}$$

как  $(c-1)^2 \geq 0$ ,  $c^2+1 > 0$ ), значит, неравенство верное при любом значении  $c$ .

**№ 736.**

$$а) a^2 - 6a + 14 = a^2 - 2 \cdot 3 \cdot a + 9 + 5 = (a - 3)^2 + 5 > 0$$

при любом значении  $a$ .

**№ 737.**

Предложить выполнить по вариантам (4 варианта) и дать общий ответ.

$$1) a^2 - 2a + 3 = a^2 - 2 \cdot 1 \cdot a + 1 + 2 = (a - 1)^2 + 2 > 0$$

при любых значениях  $a$ .

2)  $a^2 + 6 - 4a = a^2 - 2 \cdot 2 \cdot a + 4 + 2 = (a - 2)^2 + 2 > 0$  при любых значениях  $a$ .

3)  $4a - 4 - a^2 = -(a^2 - 2 \cdot 2 \cdot a + 4) = -(a - 2)^2 \leq 0$ , значит, не является верным при любом значении  $a$ .

4)  $8a - 70 - a^2 = -(a^2 - 2 \cdot 4 \cdot a + 16 + 54) = -((a - 4)^2 + 54) < 0$  при любых значениях  $a$ .

Ответ: 3.

### 3. Выполнить задания № 738 (а, в), 739, 741.

Предлагаемые упражнения достаточно сложные и предполагают осознанное применение правила сравнения чисел.

**№ 738.**

Пусть  $a$  и  $b$  – положительные числа и  $a^2 > b^2$ . По определению  $a^2 - b^2 > 0$ . Разложим левую часть неравенства на множители  $(a - b)(a + b) > 0$ . Сомножитель  $a + b > 0$  (так как  $a > 0$  и  $b > 0$ ), значит, и сомножитель  $a - b > 0$ , то есть  $a > b$ , что и требовалось доказать.

а) Составим разность квадратов чисел:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{7} + \sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{18} + 3 - 7 - 2\sqrt{14} - 2 = \\ & = 2(\sqrt{18} - \sqrt{14}) > 0. \text{ Значит, по доказанному выше свойству,} \\ & \sqrt{6} + \sqrt{3} > \sqrt{7} + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

в)  $(\sqrt{5} - 2)^2 - (\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 = 5 - 4\sqrt{5} + 4 - 6 + 2\sqrt{18} - 3 =$   
 $= 2\sqrt{18} - 2\sqrt{20} = 2(\sqrt{18} - \sqrt{20}) < 0$ . Значит, по доказанному выше свойству  $\sqrt{5} - 2 < \sqrt{6} - \sqrt{3}$ .

**№ 739.**

Это задание является продолжением предыдущего. Учащиеся могут вначале попытаться составить разность левой и правой части неравенства и определить её знак. Возникает проблемная ситуация. Затем можно предложить воспользоваться результатами решения предыдущей задачи, также следует задать учащимся вопрос о различиях в заданных ситуациях.

Составим разность квадратов выражений, стоящих в левой и правой частях неравенства

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 &= \frac{a^2+2ab+b^2}{4} - \frac{a^2+b^2}{2} = \\ &= \frac{a^2+2ab+b^2-2a^2-2b^2}{4} = -\frac{a^2-2ab+b^2}{4} = -\frac{(a-b)^2}{4} \leq 0 \end{aligned}$$

при любых  $a \geq 0$  и  $b \geq 0$ . Значит, неравенство верно

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 \text{ и верно } \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ для любых } a \geq 0 \text{ и } b \geq 0.$$

**№ 741.**

Даны числа 0; 1; 2; 3. Получили числа  $k$ ;  $k+1$ ;  $k+2$ ;  $k+3$ . Сравним произведения  $k \cdot (k+3)$  и  $(k+1)(k+2)$ . Составим разность этих выражений:

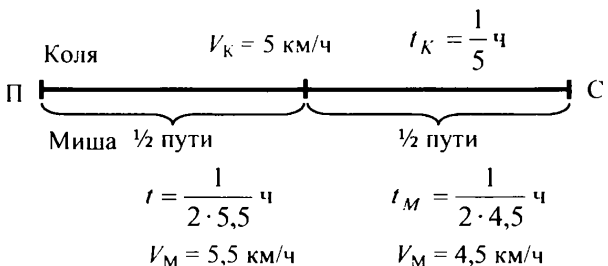
$k(k+3) - (k+1)(k+2) = k^2 + 3k - k^2 - 2k - k - 2 = -2 < 0$ , значит,  $k \cdot (k+3) < (k+1)(k+2)$  при любом значении  $k$ .

4. Сильным учащимся можно предложить для решения в классе или дома задачу повышенной трудности.

**№ 742.**

Анализ:

Сравним время, затраченное Колей и Мишей на путь от посёлка до станции. Составим разность



$$t_K - t_M = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{9}\right) = \frac{99 - 45 - 55}{495} = -\frac{1}{495} < 0.$$

Значит, Коля затратил на путь меньше времени и пришёл на станцию раньше.

Ответ: Коля.

### V. Итоги урока.

– Дайте определение числового неравенства.

– Сформулируйте универсальное правило сравнения двух чисел.

– Какие выражения называются средним арифметическим, средним геометрическим, средним гармоническим двух чисел? Каким соотношением они связаны?

Домашнее задание: № 735 (а), 736 (б), 738 (б, г), 740.

## Урок 66

### ТЕОРЕМЫ, ВЫРАЖАЮЩИЕ СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

**Цели:** изучить теоремы, выражающие свойства числовых неравенств; формировать умение применять теоремы-свойства при решении задач.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

1. Сравните числа:

а)  $\frac{5}{12}$  и  $\frac{3}{8}$ ;

в)  $-\frac{1}{4}$  и  $-\frac{1}{3}$ ;

б) 0,4 и  $\frac{2}{7}$ ;

г)  $-\frac{3}{4}$  и  $-0,75$ .

2. Не выполняя вычислений, сравните значения выражений:

а)  $1547 \cdot \frac{4}{9}$  и  $1547 \cdot \frac{7}{9}$ ;

в)  $289 \cdot 17$  и  $289 : \frac{1}{17}$ ;

б)  $2187 : \frac{2}{3}$  и  $2187 \cdot \frac{2}{3}$ ;

г)  $156,4 : 0,2$  и  $156,4 \cdot 0,2$ .

3. Сравните выражения:

а)  $a^2 + 25$  и  $10a$ ;

б)  $b^2 + 5$  и  $2b + 3$ .



### III. Объяснение нового материала.

#### 1. «Открытие» свойств числовых неравенств.

На этом этапе можно организовать работу учащихся в группах (лабораторная работа).

#### *1-я группа – арифметический блок.*

Задание 1. Сравните числа:

- а) 5,1 и 2,5;                      2,5 и 5,1;  
б) – 3 и 2;                         2 и – 3;  
в) 1,05 и 1,005;                 1,005 и 1,05.

*Вывод.* Если  $a > b$ , то  $b \dots a$ .

Если  $a < b$ , то  $b \dots a$ .

Задание 2. Сравните числа:

- а) 2,3 и 7,6;                      7,6 и 8,7;                      2,3 и 8,7;  
б) – 1,5 и – 1,25;                – 1,25 и – 1;                    – 1,5 и – 1;  
в) – 0,7 и 2;                        2 и 2,1;                         – 0,7 и 2,1.

*Вывод.* Если  $a < b$  и  $b < c$ , то  $a \dots c$ .

Задание 3. Сравните:

- а) 2,3 и 3,6;                       $2,3 + 2$  и  $3,6 + 2$ ;  
б) 1,6 и 2,07;                     $1,6 - 11$  и  $2,07 - 11$   
в) – 4 и – 3;                       $-4 + \frac{1}{2}$  и  $-3 + \frac{1}{2}$ .

*Вывод.* Если  $a < b$ , то  $a + c \dots b + c$ .

Задание 4. Сравните:

- а) 11,1 и 12,1;                     $11,1 \cdot 3$  и  $12,1 \cdot 3$ ;  
б) 0,7 и 1;                          $0,7 \cdot 1,1$  и  $1 \cdot 1,1$ ;  
в) 0,01 и 0,001;                  $0,01 \cdot 10$  и  $0,001 \cdot 10$ .

*Вывод.* Если  $a < b$  и  $c > 0$ , то  $ab \dots bc$ .

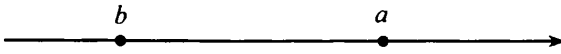
Сравните:

- а) 11,1 и 12,1;                     $11,1 \cdot (-3)$  и  $12,1 \cdot (-3)$ ;  
б) 0,7 и 1;                          $0,7 \cdot (-1,1)$  и  $1 \cdot (-1,1)$ ;  
в) 0,01 и 0,001;                  $0,01 \cdot (-10)$  и  $0,001 \cdot (-10)$ .

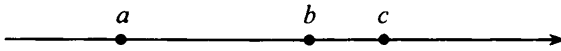
*Вывод.* Если  $a < b$  и  $c < 0$ , то  $ab \dots bc$ .

**2-я группа – геометрический блок.**

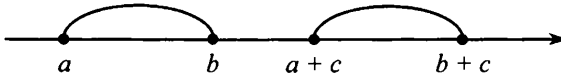
Задание 1. Если  $a$  правее  $b$ , то  $b \dots a$  ( $a > b$ , то  $b \dots a$ ).



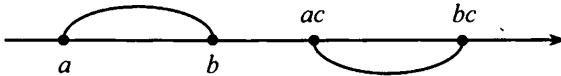
Задание 2. Если  $a$  левее  $b$  и  $b$  левее  $c$ , то  $a \dots c$ .



Задание 3. Если  $a$  левее  $b$  и  $c$  – любое число, то  $a + c \dots b + c$ .



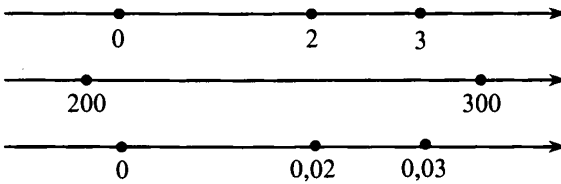
Задание 4. Если  $a$  левее  $b$  и  $c$  – положительное число, то  $ac \dots bc$ .



Используя рисунок, заполните пропуски так, чтобы получились верные утверждения.

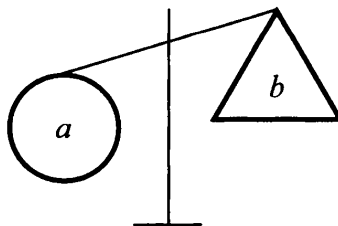
Так как  $2 < 3$ , то  $2 \cdot 100 \dots 3 \cdot 100$ .

Так как  $2 < 3$ , то  $2 \cdot 0,01 \dots 3 \cdot 0,01$ .

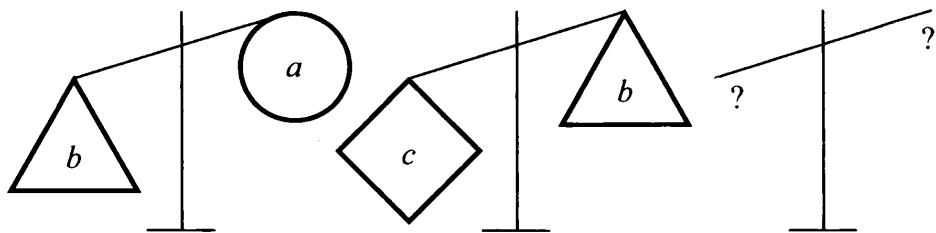


**3-я группа – практический блок.**

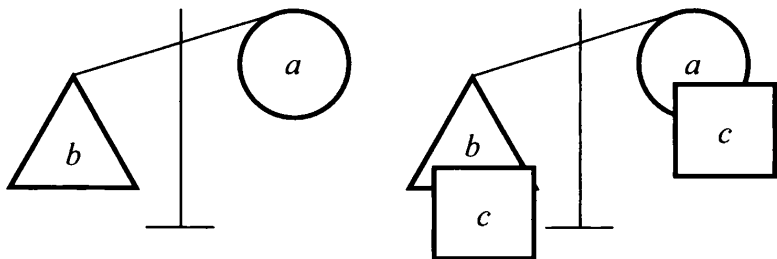
Задание 1. Если  $a$  тяжелее  $b$ , то  $b \dots a$  ( $a > b$ , то  $b \dots a$ ).



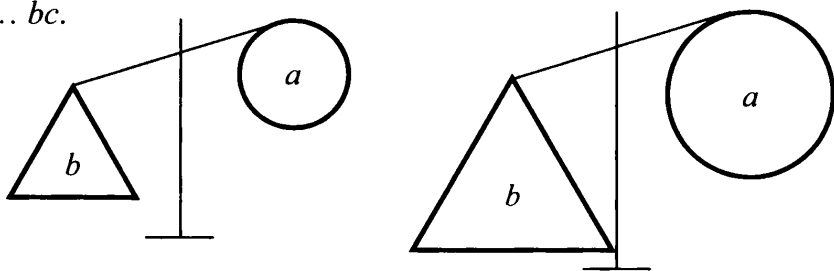
Задание 2. Если  $a$  легче  $b$  и  $b$  легче  $c$ , то  $a \dots c$ .



Задание 3. Если  $a$  легче  $b$  и  $c$  – любое число, то  $a + c \dots b + c$ .



Задание 4. Если  $a$  легче  $b$  и  $c$  – положительное число, то  $ac \dots bc$ .



2. Формулировка и доказательство теорем, выражающих свойства числовых неравенств.

Разобрать доказательство четырёх теорем согласно пункту учебника.

3. Прочитать правило (формулировка теоремы 4) на с. 158 учебника. Обратит внимание на важность знания этой теоремы для решения неравенств с одной переменной.

4. Рассмотреть на конкретном примере следствие из теоремы 4 на с. 158.

#### IV. Формирование умений и навыков.

• № 746, 748.

Эти задания на применение теорем 1 и 2. При решении следует выполнять как построение координатной прямой с точками

(геометрическая интерпретация), так и запись соответствующих числовых неравенств.

- № 749 (а, в), 750 (б, г), 751 (а, в, е).

Примеры выполнения заданий:

**№ 749.**

а)  $a - 3 > b - 3$ ;  $a - 3 + 3 > b - 3 + 3$ ;  $a > b$  (по  $T_3$ ).

$a > b$  и  $b > 4$ , то  $a > 4$  (по  $T_2$ ). Значит,  $a$  и  $b$  – положительные числа.

в)  $7a > 7b$ ;  $7a : 7 > 7b : 7$ ;  $a > b$  (по  $T_4$ ).

$a > b$  и  $b > \frac{1}{2}$ , то  $a > \frac{1}{2}$  (по  $T_2$ ). Значит,  $a$  и  $b$  – положительные числа.

**№ 750.**

|                |                           |              |
|----------------|---------------------------|--------------|
| б) $5 > -3$ ;  | $5 - 2 > -3 - 2$ ;        | $3 > -5$ .   |
| $5 > -3$ ;     | $5 - 12 > -3 - 12$ ;      | $-7 > -15$ . |
| $5 > -3$ ;     | $5 - (-5) > -3 - (-5)$ ;  | $10 > 2$ .   |
| г) $15 > -6$ ; | $15 : 3 > -6 : 3$ ;       | $5 > -2$ .   |
| $15 > -6$ ;    | $15 : (-3) < -6 : (-3)$ ; | $-5 < 2$ .   |
| $15 > -6$ ;    | $15 : (-1) < -6 : (-1)$ ; | $-15 < 6$ .  |

**№ 751.**

|              |                                     |
|--------------|-------------------------------------|
| а) $a < b$ ; | $a + 4 < b + 4$ ;                   |
| в) $a < b$ ; | $8a < 8b$ ;                         |
| е) $a < b$ ; | $a : (-1) > b : (-1)$ ; $-a > -b$ . |

- № 752 (устно), 753 (устно).

**V. Итоги урока.**

– Сформулируйте основные свойства числовых неравенств.  
– Если к обеим частям верного неравенства прибавить отрицательное число, то получится ли верное неравенство?

– Можно ли обе части верного неравенства домножить на отрицательное число, чтобы получилось верное неравенство? Какое ещё условие необходимо соблюсти?

– Если  $a < b$  и  $b > 4$ . Можно ли утверждать, что  $a > 4$ ?

**Домашнее задание:** № 747, 749 (б, г), 750 (а, в), 751 (б, г, д), 764 (а, в).

## Урок 67

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ ПРИ ОЦЕНКЕ ЗНАЧЕНИЯ ВЫРАЖЕНИЯ

**Цели:** закрепить знание теорем, выражающих основные свойства числовых неравенств; формировать умение применять изученные свойства при оценке значения выражения.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Устная работа.

1. Сформулируйте теоремы, выражающие основные свойства числовых неравенств. Для каждой теоремы приведите примеры.

2. На основании какого свойства можно утверждать, что если  $x < y$ , то:

а)  $x + 20 < y + 20$ ;      в)  $y > x$ ;      д)  $-3x > -3y$ ;

б)  $x - 20 < y$ ;      г)  $\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}y$ ;      е)  $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ .

3. Каков знак числа  $a$ , если:

а)  $7a > 2a$ ;      б)  $-5a < -3a$ ;      в)  $5a < 4a$ .

##### III. Проверочная работа.

###### Вариант 1.

1. Зная, что  $b > a$ ,  $c < a$  и  $d > b$ , сравните числа  $a$  и  $d$ ;  $b$  и  $c$ .

2. Сравните с нулём числа  $a$  и  $b$ , если известно, что:

а)  $a + 5 > b + 5$  и  $b > 0,5$ ;      б)  $-12a > -12b$  и  $b < -1$ .

###### Вариант 2.

1. Известно, что  $d > b$ ,  $c < a$  и  $b > a$ . Расположите числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  в порядке возрастания.

2. Сравните с нулём числа  $a$  и  $b$ , если известно, что:

а)  $a + 1,2 > b + 1,2$  и  $b > 3$ ;      б)  $-4a < -4b$  и  $b > 1$ .

##### IV. Формирование умений и навыков.

• Выполнение заданий: № 754 (устно), 755.

###### № 755.

$a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  – положительные числа, значит, если:

$$1) a > b, \text{ то } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}; \frac{1}{b} < \frac{1}{a};$$

$$2) d < b, \text{ то } \frac{1}{d} < \frac{1}{b};$$

$$3) c > a, \text{ то } \frac{1}{c} > \frac{1}{a}; \frac{1}{a} < \frac{1}{c}.$$

$$\text{Имеем: } \frac{1}{d} < \frac{1}{b}; \frac{1}{b} < \frac{1}{a}; \frac{1}{a} < \frac{1}{c}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{d}; \frac{1}{b}; \frac{1}{a}; \frac{1}{c}.$$

– Известно, что  $a > b$ . Расположите в порядке возрастания числа:  $a + 2$ ;  $b - 8$ ;  $a + 11$ ;  $b$ ;  $b - 6$ ;  $a$ .

#### Решение

$$a + 2 > a, \text{ так как } a + 2 - a = 2 > 0;$$

$$a + 11 > a + 2, \text{ так как } a + 11 - (a + 2) = a + 11 - a - 2 = 9 > 0;$$

$$b - 6 < b, \text{ так как } b - 6 - b = -6 < 0;$$

$$b - 8 < b - 6, \text{ так как } b - 8 - (b - 6) = b - 8 - b + 6 = -2 < 0.$$

$$\text{Имеем: } a + 11 > a + 2; a + 2 > a; a > b; b > b - 6; b - 6 > b - 8.$$

$$\text{Ответ: } b - 8; b - 6; b; a; a + 2; a + 11.$$

• Перед выполнением следующих заданий следует напомнить учащимся, что неравенства одного знака  $a < b$  и  $b < c$  можно записать в виде двойного неравенства  $a < b < c$ .

Следует проанализировать, как можно преобразовать двойное числовое неравенство, используя свойства числовых неравенств. Особое внимание уделить видоизменению неравенства при умножении на отрицательное число («переворачиваем» неравенство).

Метод оценивания значения числового выражения следует разобрать на примере со с. 158 учебника.

#### № 757.

$$3 < a < 4.$$

$$\text{а) } 3 \cdot 5 < a \cdot 5 < 4 \cdot 5; \quad 15 < 5a < 20.$$

$$\text{б) } 3 \cdot (-1) < a \cdot (-1) < 4 \cdot (-1); \quad -4 < -a < -3.$$

$$\text{в) } 3 + 2 < a + 2 < 4 + 2; \quad 5 < a + 2 < 6.$$

$$\text{г) } 5 - a = -1 \cdot a + 5, \text{ значит, } -4 + 5 < -a + 5 < -3 + 5;$$

$$1 < 5 - a < 2.$$

$$\text{д) } 3 \cdot 0,2 < 0,2a < 4 \cdot 0,2; \quad 0,6 + 3 < 0,2a + 3 < 0,8 + 3; \\ 3,6 < 0,2 + 3 < 3,8.$$

**№ 759.**

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5.$$

$$\text{а) } 1,4 + 1 < \sqrt{2} + 1 < 1,5 + 1; \quad 2,4 < \sqrt{2} + 1 < 2,5.$$

$$\text{б) } 1,4 - 1 < \sqrt{2} - 1 < 1,5 - 1; \quad 0,4 < \sqrt{2} - 1 < 0,5.$$

$$\text{в) } 2 - \sqrt{2} = (-1) \cdot \sqrt{2} + 2;$$

$$1,4 \cdot (-1) > (-1) \cdot \sqrt{2} > 1,5 \cdot (-1); \quad -1,5 < -\sqrt{2} < -1,4;$$

$$-1,5 + 2 < -\sqrt{2} + 2 < -1,4 + 2; \quad 0,5 < 2 - \sqrt{2} < 0,6.$$

**№ 762.**

При выполнении этого упражнения используем следствие теоремы 4. Обращаем особое внимание учащихся, что утверждение справедливо только для положительных чисел.

$$\text{а) } 5 < y < 8, \text{ значит, } \frac{1}{5} > \frac{1}{y} > \frac{1}{8}, \text{ т. е. } \frac{1}{8} < \frac{1}{y} < \frac{1}{5}.$$

$$\text{б) } 0,125 < y < 0,25, \frac{1}{8} < y < \frac{1}{4}, \text{ значит, } 8 > \frac{1}{y} > 4, \text{ т. е. } 4 < \frac{1}{y} < 8.$$

**№ 761.**

В этом упражнении демонстрируется практическое применение свойств числовых неравенств.

а) Пусть  $a$  см – сторона квадрата, тогда  $P = 4a$  см – периметр квадрата.  $5,1 \leq a \leq 5,2$ ;  $5,1 \cdot 4 \leq 4a \leq 5,2 \cdot 4$ ;  $20,4 \leq 4a \leq 20,8$ .

б) Пусть  $P$  см – периметр квадрата, тогда  $a = \frac{P}{4}$  см – сторона квадрата.  $15,6 \leq P \leq 15,8$ ;  $15,6 : 4 \leq \frac{P}{4} \leq 15,8 : 4$ ;  $3,85 \leq a \leq 3,95$ .

Ответ: а)  $20,4 \leq 4a \leq 20,8$ ; б)  $3,85 \leq a \leq 3,95$ .

• Предлагаемое задание более сложное, по сравнению с предыдущим и носит развивающий характер.

Пусть  $a$  и  $b$  – отрицательные числа. Верно ли, что:

$$\text{а) если } a < b, \text{ то } a^2 < b^2;$$

$$\text{б) если } a^2 < b^2, \text{ то } a < b?$$

## Решение

а) Если  $a < b$ , то  $a - b < 0$  (I). Так как  $a$  и  $b$  – отрицательные числа, то  $(a + b)$  – отрицательное число, то есть  $a + b < 0$ . Домножим обе части неравенства I на  $(a + b)$ , поменяв знак неравенства:

$$(a - b)(a + b) > 0 \cdot (a + b); (a - b)(a + b) > 0;$$

$a^2 - b^2 > 0$ , значит,  $a^2 > b^2$ , то есть утверждение неверное.

б)  $a^2 < b^2$ , значит,  $a^2 - b^2 < 0$ ;  $(a - b)(a + b) < 0$ . Разделим обе части неравенства на отрицательное число  $(a + b)$ . Получаем  $a - b > 0$ ;  $a > b$ , то есть утверждение – неверное.

Ответ: а) нет; б) нет.

## V. Итоги урока.

- Сформулируйте основные свойства числовых неравенств.
- В каком случае целесообразно записать неравенства в виде одного двойного неравенства?
- Каким образом используют основные свойства числовых неравенств при оценке значения выражения?

### Домашнее задание:

- № 758, 760.
  - Известно, что  $a > b > 0$ . Поставьте вместо \* знак  $>$  или  $<$  так, чтобы получилось верное неравенство:  
а)  $8a * 6b$ ; б)  $12a * b$ ; в)  $-6a * -4b$ ; г)  $-11a * -3b$ .
  - Известно, что  $a < b$ . Расположите в порядке возрастания числа:  $a - 2$ ;  $b + 3$ ;  $a - 17$ ;  $a$ ;  $b + 23$ ;  $b$ .
- Дополнительное задание № 756.\*

## Урок 68

### ТЕОРЕМЫ О ПОЧЛЕННОМ СЛОЖЕНИИ И УМНОЖЕНИИ НЕРАВЕНСТВ

**Цели:** изучить формулировки и доказательства теорем о почленном сложении и умножении неравенств; формировать умение применять данные теоремы при решении задач.

### Ход урока

#### I. Организационный момент.



## II. Проверочная работа.

### Вариант 1

1. Известно, что  $10 < a < 16$ . Оцените значение выражения:

а)  $\frac{1}{2}a$ ;    б)  $-3a$ ;    в)  $a - 16$ .

2. Известно, что  $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ . Оцените значение выражения:

а)  $5\sqrt{5}$ ;    б)  $-\sqrt{5}$ ;    в)  $3 + \sqrt{5}$ ;    г)  $3 - \sqrt{5}$ .

### Вариант 2

1. Известно, что  $5 < m < 15$ . Оцените значение выражения:

а)  $\frac{1}{5}m$ ;    б)  $-2m$ ;    в)  $m - 6$ .

2. Известно, что  $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$ . Оцените значение выражения:

а)  $2\sqrt{7}$ ;    б)  $-\sqrt{7}$ ;    в)  $2 + \sqrt{7}$ ;    г)  $3 - \sqrt{7}$ .

### Вариант 3

1. Известно, что  $15 < x < 20$ . Оцените значение выражения:

а)  $\frac{1}{5}x$ ;    б)  $-\frac{x}{2}$ ;    в)  $3x + 10$ .

2. Известно, что  $3,31 < \sqrt{11} < 3,32$ . Оцените значение выражения:

а)  $3\sqrt{11}$ ;    б)  $-\frac{1}{2}\sqrt{11}$ ;    в)  $\sqrt{11} + 1,8$ ;    г)  $4,53 - \sqrt{11}$ .

### Вариант 4

1. Известно, что  $6 < y < 9$ . Оцените значение выражения:

а)  $y + 5$ ;    б)  $-\frac{1}{3}y$ ;    в)  $\frac{1}{2}y - 3$ .

2. Известно, что  $4,12 < \sqrt{13} < 4,13$ . Оцените значение выражения:

а)  $\frac{1}{2}\sqrt{13}$ ;    б)  $-3\sqrt{13}$ ;    в)  $\sqrt{13} + 0,5$ ;    г)  $2,7 - \sqrt{13}$ .

## III. Объяснение нового материала.

1. Для мотивации изучения теорем о сложении и умножении числовых неравенств следует предложить учащимся для решения задачи практического характера.

**Задача 1.** Длина прямоугольника больше 12 см, а его ширина больше 3 см. Можно ли утверждать, что периметр этого прямоугольника больше 30 см?

### Решение

Пусть  $a$  и  $b$  – длина и сторона прямоугольника соответственно, тогда периметр равен  $2a + 2b$ .

$$a > 12; \quad 2a > 24;$$

$$b > 3; \quad 2b > 6.$$

Доказать, что  $2a + 2b > 30$ .

Учащиеся могут интуитивно сложить почленно неравенства и получить следующий результат:

$$2a + 2b > 24 + 6;$$

$$2a + 2b > 30.$$

Следует отметить, что так можно поступать, но необходимо провести доказательство, используя известные теоремы, выражающие свойства числовых неравенств.

$$\square : 2a > 24; \quad 2a + 2b > 24 + 2b \quad (1)$$

$$2b > 6; \quad 2b + 24 > 6 + 24; \quad 24 + 2b > 30. \quad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) по теореме 2 следует, что  $2a + 2b > 30$ . ■

Далее просим учащихся сформулировать «открытое» ими утверждение в общем виде и записать его аналитическую модель:

**Если  $a < b$  и  $c < d$ , то  $a + c < b + d$**

**Теорема 5**

Доказательство теоремы можно разобрать по учебнику, так как в нём повторяется ход рассуждений для решения задачи 1.

**Задача 2.** Длина прямоугольника больше 15 дм, а его ширина больше 6 дм. Можно ли утверждать, что его площадь больше 90 дм<sup>2</sup>?

### Решение

Можно предложить учащимся провести доказательство утверждения самостоятельно по аналогии с предыдущей задачей.

Пусть  $a$  и  $b$  – длина и сторона прямоугольника, тогда его площадь равна  $a \cdot b$ .

$$a > 15; \quad b > 6.$$

Доказать, что  $ab > 90$ .

$$\square : a > 15; b > 0, \text{ значит, } a \cdot b > 15 \cdot b. \quad (1)$$

$$b > 6; b \cdot 15 > 6 \cdot 15; 15b > 90. \quad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) по теореме 2 следует, что  $ab > 90$ . ■

Просим учащихся дать общую формулировку утверждения. Замечаем, что теорема о почленном умножении неравенств справедлива для положительных чисел. Если среди чисел есть отрицательные, то при почленном умножении неравенств может получиться неверное неравенство. Просим учащихся привести контрпримеры. На доску выносятся запись:

**Если  $a < b$  и  $c < d$ , где  
 $a, b, c, d$  – положительные числа, то  $ac < bd$**

**Теорема 6**

Доказательство разбираем по учебнику.

2. Следствие из теоремы 6 также разбираем по учебнику.

#### **IV. Формирование умений и навыков.**

Обращаем внимание учащихся, что для почленного сложения или умножения неравенств удобнее их записывать друг под другом.

• Выполнение заданий: № 765, 766, 767 (а), 768.

**№ 767.**

а)  $a^2 > b^2$ , значит,  $a^2 - b^2 > 0$ ;  $(a - b)(a + b) > 0$ .

$a$  и  $b$  – положительные числа, значит,  $a + b > 0$ . Разделим обе части неравенства на  $a + b$ , получим  $a - b > 0$ , значит,  $a > b$ .

Имеем:  $a^2 > b^2$

$$\frac{a > b}{a^2 \cdot a > b^2 \cdot b, \text{ то есть } a^3 > b^3}.$$

**№ 768.**

а)  $3 < a < 4$

$$\frac{4 < b < 5}{7 < a + b < 9}$$

в)  $3 < a < 4$

$$\frac{4 < b < 5}{12 < ab < 20}$$

$$\text{б) } a - b = a + (-1) \cdot b$$

$$4 < b < 5$$

$$-5 < -b < -4$$

$$3 < a < 4$$

---

$$3 + (-5) < a + (-b) < 4 + (-4);$$

$$-2 < a - b < 0$$

$$\text{г) } \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

$$4 < b < 5$$

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{4}$$

$$3 < a < 4$$

---

$$\frac{1}{5} \cdot 3 < \frac{1}{b} \cdot a < \frac{1}{4} \cdot 4$$

$$0,6 < \frac{a}{b} < 1$$

• Задание повышенной сложности на «прямое» применение теорем 5 и 6: № 776.

№ 776.

Запишем соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим для всех пар чисел:

$$\left. \begin{array}{l} 2\sqrt{ab} \leq a + b \\ 2\sqrt{bc} \leq b + c \\ 2\sqrt{ac} \leq a + c \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ac} \leq (a+b)(b+c)(a+c) \\ 8\sqrt{(abc)^2} \leq (a+b)(b+c)(a+c) \\ 8 \cdot |abc| \leq (a+b)(b+c)(a+c). \end{array}$$

Так как  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ , то  $|abc| = abc$ , значит,

$8abc \leq (a+b)(b+c)(a+c)$ , то есть  $(a+b)(b+c)(a+c) \leq 8abc$ .

## V. Итоги урока.

– Сформулируйте теорему о почленном сложении неравенств.

– Сформулируйте теорему о почленном умножении неравенств. Какие ограничения накладываются на числа?

– Сформулируйте следствие из теоремы о почленном умножении неравенств.

– Можно ли применить данные теоремы к более чем двум неравенствам указанного вида?

**Домашнее задание:** 1. № 767 (б), 769.

2. Докажите, что если  $a > 5$  и  $b > 6$ , то

а)  $2a + b > 15$ ;

б)  $12a > 4b \geq 80$ .

3. Докажите, что если  $a > 6$  и  $b < -1$ , то

а)  $3a - b > 16$ ;

б)  $b - 12a < -50$ .

4. № 776 (б)\* (дополнительное задание).

## Урок 69

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРЕМ О ПОЧЛЕННОМ УМНОЖЕНИИ И СЛОЖЕНИИ НЕРАВЕНСТВ ПРИ ОЦЕНКЕ ЗНАЧЕНИЯ ВЫРАЖЕНИЯ

**Цели:** закрепить знание теорем о почленном сложении и умножении неравенств; формировать умения применять данные теоремы для оценки значения выражения, решать задачи повышенной трудности.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Устная работа.

1. Известно, что  $-5 < a < 9$ . Оцените значение выражения:

а)  $2a$ ;                      в)  $\frac{a}{5}$ ;                      д)  $a + 4$ ;

б)  $-4a$ ;                      г)  $-a$ ;                      е)  $3 - a$ .

2. Пусть  $b$  – произвольное число, сравните с нулём значение выражения:

а)  $-b^2 - 16$ ;                      г)  $(b - 2)^2 + 16$ ;  
б)  $13 + b^2$ ;                      д)  $(15b - 127)^2 + (1 - b)^2$ .

3. Известно, что  $x > 5, y > 15$ . Оцените значение выражения:

а)  $x + y$ ;                      в)  $2x + y$ ;                      д)  $-2xy$ ;

б)  $x \cdot y$ ;                      г)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ;                      е)  $x^2 - 25$ .

##### III. Формирование умений и навыков.

1. Актуализация знаний.

При выполнении устной работы учащиеся использовали теоремы о почленном сложении и умножении неравенств и следствие. Просим их сформулировать данные теоремы.

2. Работа по учебнику.

Теоремы о почленном сложении и умножении неравенств используются для оценки суммы, разности, произведения и частного. Разбираем примеры 1–4 на с. 162–163 учебника. Еще раз обращаем внимание на удобную запись неравенств (одного под другим) при выполнении почленного сложения либо умножения: № 770.



$$58^\circ \leq \alpha \leq 59^\circ;$$

$$-59^\circ \leq -\alpha \leq -58^\circ$$

$$102^\circ \leq \beta \leq 103^\circ;$$

$$-103^\circ \leq -\beta \leq -102^\circ$$

$$180^\circ - 59^\circ - 103^\circ \leq 180^\circ - \alpha - \beta \leq 180^\circ - 58^\circ - 102^\circ$$

$$18^\circ \leq 180^\circ - \alpha - \beta \leq 20^\circ.$$

Ответ:  $18^\circ \leq \gamma \leq 20^\circ$ .

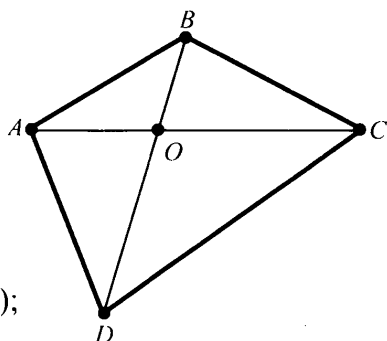
5. Задания повышенной трудности (для сильных учащихся).

**№ 777.**

Пусть  $ABCD$  – выпуклый четырёхугольник, тогда его диагонали пересекаются в точке  $O$ .

Докажем, что  $AB + DC < AC + BD$  и  $BC + AD < AC + BD$ .

□: Воспользуемся неравенством треугольника (каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон).



$$1) \quad AB < AO + BO$$

$$DC < OD + OC$$

---


$$AB + DC < AO + BO + DO + OC;$$

$$AB + DC < (AO + OC) + (BO + OD);$$

$$AB + DC < AC + BD.$$

$$2) \quad BC < BO + CO$$

$$AD < OA + OD$$

---


$$BC + AD < BO + CO + OA + OD;$$

$$BC + AD < (BO + OD) + (CO + OA)$$

$$BC + AD < BD + AC. \blacksquare$$

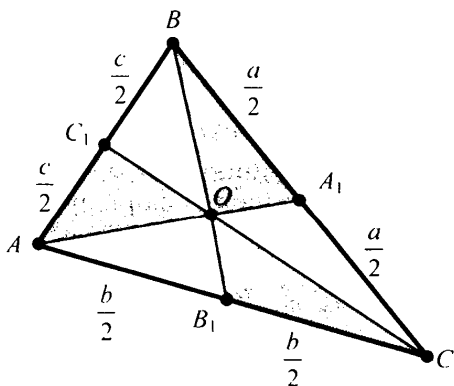
**№ 778.**

Медианы треугольника  $ABC$  пересекаются в одной точке  $O$ .

Обозначим длины сторон треугольника  $a, b, c$ .  $AA_1, BB_1, CC_1$  – медианы.

1) Докажем, что сумма длин медиан треугольника больше его полупериметра.

□: Воспользуемся неравенством треугольника:



$$\left. \begin{array}{l} BO + OA_1 > \frac{a}{2} \\ CO + OB_1 > \frac{b}{2} \\ AO + OC_1 > \frac{c}{2} \end{array} \right| \Rightarrow BO + OA_1 + CO + OB_1 + AO + OC_1 > \frac{a+b+c}{2}$$

$$(BO + OB_1) + (AO + OA_1) + (CO + OC_1) > \frac{P}{2}$$

$$BB_1 + AA_1 + CC_1 > \frac{P}{2}. \blacksquare$$

2) Докажем, что сумма длин медиан треугольника меньше его периметра.

Предлагаем учащимся решить самостоятельно это задание в классе или дома.

#### IV. Итоги урока.

- Сформулируйте основные свойства числовых неравенств.
- Сформулируйте теоремы о сложении и умножении числовых неравенств.
- Каким образом используют теоремы о сложении и умножении числовых неравенств при оценке значения выражения?

**Домашнее задание:** 1. № 771, 773.

2. Верно ли, что:

- а) если  $a > 4$  и  $b > 6$ , то  $2a + b > 45$ ;
- б) если  $a > 3$  и  $b > 9$ , то  $3ab > 30$ .

3. Сравните, если возможно:

- а)  $3a + 2b$  и  $16$ , если  $a > 4$  и  $b > 8$ ;
- б)  $5a - b$  и  $20$ , если  $a > 4$  и  $b < -3$ .

4. № 776 (б)\*.

### Урок 70

## АБСОЛЮТНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ПРИБЛИЖЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ

**Цели:** ввести понятие абсолютной погрешности приближенного значения; формировать умение находить абсолютную погрешность приближенного значения и значение величины по точности её измерения.

### Ход урока

#### I. Организационный момент.



## II. Проверочная работа.

### Вариант 1

1. Пусть  $2 < a < 3$  и  $1 < b < 2$ . Оцените значение выражения:

а)  $a + b$ ;                      б)  $a - b$ ;                      в)  $ab$ ;                      г)  $\frac{a}{b}$ .

2. Зная, что  $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$  и  $2,4 < \sqrt{6} < 2,5$ , оцените значение выражения:

а)  $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ ;                      б)  $\sqrt{6} - \sqrt{3}$ .

### Вариант 2

1. Известно, что  $5 < x < 6$  и  $2 < y < 3$ . Оцените значение выражения:

а)  $x + y$ ;                      б)  $x - y$ ;                      в)  $xy$ ;                      г)  $\frac{x}{y}$ .

2. Зная, что  $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$  и  $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ , оцените значение выражения:

а)  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ ;                      б)  $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ .

### Вариант 3

1. Известно, что  $8 < a < 10$  и  $1 < b < 2$ . Оцените значение выражения:

а)  $a + b$ ;                      б)  $a - b$ ;                      в)  $ab$ ;                      г)  $\frac{a}{b}$ .

2. Зная, что  $2,4 < \sqrt{6} < 2,5$  и  $3,1 < \sqrt{10} < 3,2$ , оцените значение выражения:

а)  $\sqrt{6} + \sqrt{10}$ ;                      б)  $\sqrt{6} - \sqrt{10}$ .

## III. Устная работа.

1. Округлите число:

а) 35,7 до единиц;                      г) 0,53748 до тысячных;  
б) 289 до десятков;                      д) 3847,5 до сотен;  
в) 82,3591 до десятых;                      е) 1,384795 до десятитысячных.

2.  $a < b$  и  $b \leq 0$ , найдите значение выражения:

а)  $|a + b| = *$ ;                      в)  $|b - a| = *$ ;  
б)  $|a| + |b| = *$ ;                      г)  $|a \cdot b| = *$ .

3. Представьте в виде десятичной дроби.

а)  $\frac{2}{8}$ ;

б)  $\frac{3}{4}$ ;

в)  $\frac{1}{3}$ ;

г)  $\frac{8}{5}$ .

#### IV. Объяснение нового материала.

##### 1. Мотивация изучения.

Многочисленные приложения математических методов в различных областях знаний и жизненной практики часто осуществляются в форме решения задач на вычисление. Значения таких непрерывных величин как расстояние, скорость, стоимость, сила тока и др. обязательно являются приближенными числами, так как точные измерения таких величин принципиально невозможны. Это связано с особенностями как самих измерительных приборов, так и с погрешностями, которые допускает человек, пользующийся этими приборами.

Практическое использование полученного приближенного числа без оценки его погрешности может оказаться опасным. Например, изготовление хотя бы одной детали самолёта по расчётным данным, точность которых неизвестна, может обернуться катастрофой.

##### 2. Введение понятия абсолютной погрешности.

Объяснение проводить в соответствии с пунктом учебника. На доску выносится запись:

**Абсолютной погрешностью** приближённого значения называют модуль разности точного и приближённого значений

Обращаем внимание учащихся, что абсолютная погрешность показывает разницу между точным и приближённым значением в абсолютном выражении, не указывая, в какую сторону ошиблись при вычислении – увеличения или уменьшения числа.

##### 3. Первичное закрепление понятия *абсолютная погрешность*.

Выполним задания по учебнику: № 782, 783 (а, б).

##### № 782.

1.  $17,26 \approx 17,3$ .

Абсолютная погрешность равна  $|17,26 - 17,3| = |-0,04| = 0,04$ .

2.  $12,034 \approx 12,0$ .

Абсолютная погрешность равна  $|12,034 - 12,0| = |0,034| = 0,034$ .

3.  $8,654 \approx 8,7$ .

Абсолютная погрешность равна  $|8,654 - 8,7| = |-0,046| = 0,046$ .

### № 783.

а)  $9,87 \approx 10$ .

Абсолютная погрешность равна  $|9,87 - 10| = |-0,13| = 0,13$ .

б)  $124 \approx 120$ .

Абсолютная погрешность равна  $|124 - 120| = |4| = 4$ .

4. Рассмотрение случаев, когда абсолютную погрешность найти невозможно (мы не знаем точного значения). В подобных ситуациях мы указываем число, больше которого абсолютная погрешность быть не может.

Вообще, если  $x \approx a$  и абсолютная погрешность этого приближённого значения не превосходит некоторого числа  $h$ , то число  $a$  называют **приближённым значением  $x$  с точностью до  $h$** .

На доску выносим соответствующую запись:

$$x \approx a \text{ с точностью до } h$$

или

$$x = a \pm h, \text{ что означает } a - h \leq x \leq a + h$$

Предлагаем учащимся привести примеры, где они встречали подобную запись (надпись на рулоне обоев:  $18 \pm 0,3$  м; на коробке с конфетами:  $300 \pm 5$  г; на упаковке с замороженными продуктами:  $-20 \pm 2$  °С).

## V. Формирование умений и навыков.

1. Выполнение упражнений по учебнику.

### № 784.

$\frac{1}{7} \approx 0,14$ . Абсолютная погрешность равна

$$\left| \frac{1}{7} - 0,14 \right| = \left| \frac{1}{7} - \frac{7}{50} \right| = \left| \frac{50 - 49}{350} \right| = \left| \frac{1}{350} \right| = \frac{1}{350}.$$

**785 (а).**

$y = 6,5 \pm 0,1$ , значит,  $6,5 - 0,1 \leq y \leq 6,5 + 0,1$ ;

$$6,4 \leq y \leq 6,6.$$

2. Задание. Представьте обыкновенную дробь в виде десятичной и округлите до тысячных. Найдите абсолютную погрешность приближения:

а)  $\frac{5}{6}$ ;

б)  $1\frac{5}{11}$ .

Решение

а)  $\frac{5}{6} = 0,8(3) = 0,83333\dots \approx 0,833$ .

Абсолютная погрешность равна

$$\left| \frac{5}{6} - 0,833 \right| = \left| \frac{5}{6} - \frac{833}{1000} \right| = \left| \frac{5 \cdot 500 - 833 \cdot 3}{3000} \right| = \left| \frac{1}{3000} \right| = \frac{1}{3000}.$$

б)  $1\frac{5}{11} = \frac{16}{11} = 1,(45) = 1,4545\dots \approx 1,455$ .

Абсолютная погрешность равна

$$\left| \frac{16}{11} - 1,455 \right| = \left| \frac{16}{11} - \frac{1455}{1000} \right| = \left| \frac{16}{11} - \frac{291}{200} \right| = \left| -\frac{1}{2200} \right| = \frac{1}{2200}.$$

3. Выполнение заданий по учебнику.

**№ 787.**

$a = 420 \text{ г} \pm 3 \%$ , значит,  $420 - 3 \% \leq a \leq 420 + 3 \%$ .

$$\frac{420}{100} \cdot 3 = 12,6; \quad 420 - 12,6 \leq a \leq 420 + 12,6;$$

$$407,4 \leq a \leq 432,6.$$

Ответ:  $407,4 \leq a \leq 432,6$ .

**№ 789.**

Масса мешка картофеля равна  $32 \pm 1$  кг, то есть

$$32 - 1 \leq m \leq 32 + 1; \quad 31 \leq m \leq 33.$$

Пусть  $a$  – приближённое значение массы мешка картофеля с точностью до 0,1 кг, тогда  $a - 0,1 \leq m \leq a + 0,1$ .

а) Если  $a = 31,4$ , то  $31,3 \leq m \leq 31,5$ .

$31,3 > 31$  и  $31,5 < 33$ , значит, масса может оказаться равной 31,4 кг.

б) Если  $a = 32,5$ , то  $32,4 \leq m \leq 32,6$ .  
 $32,4 > 31$  и  $32,6 < 33$ , значит, масса может оказаться равной  $32,5$  кг.

в) Если  $a = 33,2$ , то  $33,1 \leq m \leq 33,3$ .  
 $33,1 > 33$ , значит, масса не может оказаться равной  $33,2$  кг.

г) Если  $a = 30,7$ , то  $30,6 \leq m \leq 30,8$ .  
 $30,8 < 31$ , значит, масса не может оказаться равной  $30,7$  кг.

Ответ: а) да; б) да; в) нет; г) нет.

## VI. Итоги урока.

– Сформулируйте правило округления чисел.  
– Что называют абсолютной погрешностью приближенного значения?

– Объясните смысл записи  $x = a \pm h$ .

– От чего зависит точность приближённого значения?

**Домашнее задание:** № 783 (в, г), 785 (б), 786, 788.

## Урок 71

### ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ПРИБЛИЖЁННОГО ЗНАЧЕНИЯ

**Цели:** ввести понятие относительной погрешности приближённого значения; формировать умение оценивать качество измерения с помощью относительной погрешности.

#### Ход урока

##### I. Устная работа.

1. Приближённое значение числа  $x$  равно  $a$ . Найдите абсолютную погрешность приближения, если:

а)  $x = 2,85$ ,  $a = 2,9$ ;

в)  $x = 18,65$ ,  $a = 19$ ;

б)  $x = 26,3$ ,  $a = 26$ ;

г)  $x = 686$ ,  $a = 690$ .

2. Оцените точное значение  $b$ , если:

а)  $b = 6 \pm 1$ ;

в)  $b = 14,568 \pm 0,001$ ;

б)  $b = 15 \pm 0,1$ ;

г)  $b = 120 \pm 10$ .

При проведении устной работы одновременно актуализируем определение абсолютной погрешности приближённого значения.

## II. Объяснение нового материала.

### 1. Мотивация изучения.

Предлагаем учащимся для рассмотрения следующую ситуацию. Марина, измеряя длину детали, имеющую истинную длину 10 см, допустила абсолютную погрешность, равную 1 см. Сергей, измеряя длину комнаты, истинная длина которой 5 м, также допустил абсолютную погрешность, равную 1 см. Вопрос: кто из ребят выполнил измерение более точно (качественно)?

Учащиеся интуитивно понимают, что Сергей более качественно выполнил работу, так как относительно размера комнаты эта абсолютная погрешность не столь существенна, как относительно размера детали.

### 2. Введение понятия «относительная погрешность».

Сообщаем учащимся, что точность приближения, или его качество, как правило, характеризуется не абсолютной его погрешностью, а относительной. Выносим на доску запись:

**Относительной погрешностью** приближённого значения называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближённого значения

В рассмотренной выше ситуации при измерении (в сантиметрах) детали и длины комнаты получены результаты:

$$a = 10 \pm 1 \text{ (длина детали); } b = 500 \pm 1 \text{ (длина комнаты).}$$

В первом случае относительная погрешность составляет  $\frac{1}{10}$ , во втором  $\frac{1}{500}$ . Выразив относительную погрешность в процентах, получим 10 % и 0,2 %.

**Вывод:** чем меньше относительная погрешность приближения, тем приближение считается более точным.

3. По примеру со с. 166–167 учебника разбираем способ оценки относительной погрешности в случае, когда абсолютная погрешность не известна, а известна только точность приближённого значения.

Пусть  $a$  – приближённое значение  $x$  с точностью до  $h$ , тогда  $x = a \pm h$ . Значит, относительная погрешность *не превосходит*

$\frac{h}{a} \cdot 100\%$ . Иными словами, приближение выполнено с точностью до  $\frac{h}{a} \cdot 100\%$ .

### III. Формирование умений и навыков.

Все задания, которые учащиеся должны выполнить на этом уроке, можно разбить на три группы:

- 1) Определение точности измерения.
- 2) Вычисление относительной погрешности приближённого значения по абсолютной погрешности.
- 3) Оценка относительной погрешности приближённого значения по его точности.

• № 790, 791.

#### № 791.

17,9 мм – получено штангенциркулем;

18 мм – получено линейкой;

17,86 мм – получено микрометром.

Измерение:

– линейкой с точностью до 1 мм;

– штангенциркулем с точностью до 0,1 мм;

– микрометром с точностью до 0,01 мм.

Задание. Округлите число единиц и найдите относительную погрешность округления:

а) 1,7;

б) 5,314.

Решение

а)  $1,7 \approx 2$ .

Абсолютная погрешность равна  $|1,7 - 2| = 0,3$ .

Относительная погрешность равна  $\frac{0,3}{2} \cdot 100\% = 15\%$ .

б)  $5,314 \approx 5$ .

Абсолютная погрешность равна  $|5,314 - 5| = 0,314$ .

Относительная погрешность равна  $\frac{0,314}{5} \cdot 100\% = 6,28\%$ .

Ответ: 15%; б) 6,28%.

**№ 793.**

$\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$  – табличное значение плотности железа.

$7,6 \text{ г/см}^3$  – приближённое значение.

Абсолютная погрешность составляет  $|7,8 - 7,6| = 0,2$ .

Относительная погрешность равна  $\frac{0,2}{7,6} \cdot 100\% \approx 2,6\%$ .

Ответ:  $\approx 2,6\%$ .

**№ 795.**

$d = 0,15 \pm 0,01 \text{ мм}$ ;

$l = 384000 \pm 500 \text{ км}$ .

Относительная погрешность измерения толщины волоса не превышает  $\frac{0,01}{0,15} \cdot 100\%$ , то есть  $\approx 6,7\%$ .

Относительная погрешность измерения расстояния от Земли до Луны не превышает  $\frac{500}{384000} \cdot 100\%$ , то есть  $0,1\%$ .

$6,7\% > 0,1\%$ , значит, измерение расстояния от Земли до Луны произведено более качественно (с большей точностью).

**IV. Итоги урока.**

– Почему по абсолютной погрешности приближённого значения нельзя судить о качестве приближения (измерения)? Приведите пример.

– Что называется относительной погрешностью приближённого значения?

– Каким образом можно оценить относительную погрешность приближённого значения, если абсолютная погрешность неизвестна?

**Домашнее задание:**

1. № 792, 794.

2. Сравнить качества измерения массы  $M$  электровоза и массы  $m$  таблетки лекарства, если  $M \approx 184m$  (с точностью до  $0,5m$ ) и  $m \approx 0,25 \text{ г}$  (с точностью до  $0,01 \text{ г}$ ).

3. Подготовиться к контрольной работе, повторить п. 28–30.

№ 797 (а), 930 (а), 932.



## Урок 72

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 7

Рекомендации по оцениванию.

Для получения отметки «3» достаточно выполнить первые два задания. Для получения отметки «5» необходимо выполнить любые четыре задания. Если выполнены все пять заданий, учащийся может получить дополнительную оценку.

#### Вариант 1

1. Докажите неравенство:

а)  $(x - 2)^2 > x(x - 4)$ ;                      б)  $a^2 + 1 \geq 2(3a - 4)$ .

2. Известно, что  $a < b$ . Сравните:

а)  $21a$  и  $21b$ ;                      б)  $-3,2a$  и  $-3,2b$ ;                      в)  $1,5b$  и  $1,5a$ .

Результат сравнения запишите в виде неравенства.

3. Известно, что  $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$ . Оцените:

а)  $2\sqrt{7}$ ;    б)  $-\sqrt{7}$ .

4. Оцените периметр и площадь прямоугольника со сторонами  $a$  см и  $b$  см, если известно, что  $2,6 < a < 2,7$ ,  $1,2 < b < 1,3$ .

5. К каждому из чисел 2, 3, 4 и 5 прибавили одно и то же число  $a$ . Сравните произведение крайних членов получившейся последовательности с произведением средних членов.

#### Вариант 2

1. Докажите неравенство:

а)  $(x + 7)^2 > x(x + 14)$ ;                      б)  $b^2 + 5 \geq 10(b - 2)$ .

2. Известно, что  $a > b$ . Сравните:

а)  $18a$  и  $18b$ ;                      б)  $-6,7a$  и  $-6,7b$ ;                      в)  $-3,7b$  и  $-3,7a$ .

Результат сравнения запишите в виде неравенства.

3. Известно, что  $3,1 < \sqrt{10} < 3,2$ . Оцените:

а)  $3\sqrt{10}$ ;    б)  $-\sqrt{10}$ .

4. Оцените периметр и площадь прямоугольника со сторонами  $a$  см и  $b$  см, если известно, что  $1,5 < a < 1,6$ ,  $3,2 < b < 3,3$ .

5. Даны четыре последовательных натуральных числа. Сравните произведение первого и последнего из них с произведением двух средних чисел.

### Вариант 3

1. Докажите неравенство:

а)  $(x-3)^2 > x(x-6)$ ;                      б)  $y^2 + 1 \geq 2(5y-12)$ .

2. Известно, что  $x < y$ . Сравните:

а)  $8x$  и  $8y$ ;                      б)  $-1,4x$  и  $-1,4y$ ;                      в)  $-5,6y$  и  $-5,6x$ .

Результат сравнения запишите в виде неравенства.

3. Известно, что  $3,6 < \sqrt{13} < 3,7$ . Оцените:

а)  $3\sqrt{13}$ ;    б)  $-2\sqrt{13}$ .

4. Оцените периметр и площадь прямоугольника со сторонами  $x$  см и  $y$  см, если известно, что  $1,1 < x < 1,2$ ,  $1,5 < y < 1,6$ .

5. Даны три последовательных натуральных числа. Сравните квадрат среднего из них с произведением двух других.

### Вариант 4

1. Докажите неравенство:

а)  $(x+1)^2 > x(x+2)$ ;                      б)  $a^2 + 1 \geq 2(3a-4)$ .

2. Известно, что  $x > y$ . Сравните:

а)  $13x$  и  $13y$ ;                      б)  $-5,1x$  и  $-5,1y$ ;                      в)  $2,6y$  и  $2,6x$ .

Результат сравнения запишите в виде неравенства.

3. Известно, что  $3,3 < \sqrt{11} < 3,4$ . Оцените:

а)  $5\sqrt{11}$ ;    б)  $-2\sqrt{11}$ .

4. Оцените периметр и площадь прямоугольника со сторонами  $c$  см и  $b$  см, если известно, что  $4,6 < c < 4,7$ ,  $6,1 < b < 6,2$ .

5. К каждому из чисел 6, 5, 4 и 3 прибавили одно и то же число  $m$ . Сравните произведение средних членов получившейся последовательности с произведением крайних членов.

### РЕШЕНИЕ ВАРИАНТОВ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

#### Вариант 1

1. а)  $(x-2)^2 - x(x-4) = x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4x = 4 > 0$ , значит,  
 $(x-2)^2 > x(x-4)$ .

б)  $a^2 + 1 - 2(3a-4) = a^2 + 1 - 6a + 8 = a^2 - 6a + 9 = (a-3)^2 \geq 0$ ,  
значит,  $a^2 + 1 \geq 2(3a-4)$ .

$$\begin{array}{lll}
 2. \text{ а) } a < b; & \text{б) } a < b; & \text{в) } a < b; \\
 21a < 21b; & -3,2a > -3,2b; & b > a; \\
 & & 1,5b > 1,5a.
 \end{array}$$

Ответ: а)  $21a < 21b$ ; б)  $-3,2a > -3,2b$ ; в)  $1,5b > 1,5a$ .

$$\begin{array}{ll}
 3. \text{ а) } 2,6 < \sqrt{7} < 2,7; & \text{б) } 2,6 < \sqrt{7} < 2,7 \\
 5,2 < 2\sqrt{7} < 5,4; & -2,7 < -\sqrt{7} < -2,6.
 \end{array}$$

Ответ: а)  $5,2 < 2\sqrt{7} < 5,4$ ; б)  $-2,7 < -\sqrt{7} < -2,6$ .

$$\begin{array}{ll}
 4. \text{ } S = a \cdot b \text{ см}^2; & P = 2(a + b) \text{ см;} \\
 2,6 < a < 2,7 & 2,6 < a < 2,7 \\
 1,2 < b < 1,3 & 1,2 < b < 1,3 \\
 \hline
 2,6 \cdot 1,2 < a \cdot b < 2,7 \cdot 1,3 & 2,6 + 1,2 < a + b < 2,7 + 1,3 \\
 3,12 < ab < 3,51 & 2 \cdot 3,8 < 2(a + b) < 2 \cdot 4 \\
 3,12 < S < 3,51 & 7,6 < 2(a + b) < 8,0 \\
 & 7,6 < P < 8,0
 \end{array}$$

Ответ:  $3,12 < S < 3,51$ ;  $7,6 < P < 8,0$ .

5. Пусть  $2 + a$ ,  $3 + a$ ,  $4 + a$ ,  $5 + a$  – полученная последовательность.

$(2 + a)(5 + a) - (3 + a)(4 + a) = 10 + 2a + 5a + a^2 - 12 - 3a - 4a - a^2 = -2 < 0$ , значит, произведение крайних членов последовательности меньше произведения её средних членов.

## Вариант 2

$$\begin{array}{l}
 1. \text{ а) } (x + 7)^2 - x(x + 14) = x^2 + 14x + 49 - x^2 - 14x = 49 > 0, \\
 \text{значит, } (x + 7)^2 > x(x + 14).
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{б) } b^2 + 5 - 10(b - 2) = b^2 + 5 - 10b + 20 = b^2 - 10b + 25 = \\
 = (b - 5)^2 \geq 0, \text{ значит, } b^2 + 5 \geq 10(b - 2)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 2. \text{ а) } a > b & \text{б) } a > b & \text{в) } a > b \\
 18a > 18b; & -6,7a < -6,7b; & b < a \\
 & & -3,7b > -3,7a.
 \end{array}$$

Ответ: а)  $18a > 18b$ ; б)  $-6,7a < -6,7b$ ; в)  $-3,7b > -3,7a$ .

$$\begin{array}{ll}
 3. \text{ а) } 3,1 < \sqrt{10} < 3,2 & \text{б) } 3,1 < \sqrt{10} < 3,2 \\
 9,3 < 3\sqrt{10} < 9,6; & -3,2 < -\sqrt{10} < -3,1.
 \end{array}$$

Ответ: а)  $9,3 < 3\sqrt{10} < 9,6$ ; б)  $-3,2 < -\sqrt{10} < -3,1$ .

$$4. S = a \cdot b \text{ см}^2$$

$$1,5 < a < 1,6$$

$$3,2 < b < 3,3$$

---


$$4,80 < ab < 5,28$$

$$4,80 < S < 5,28.$$

$$P = 2(a + b) \text{ см.}$$

$$1,5 < a < 1,6$$

$$3,2 < b < 3,3$$

---


$$1,5 + 3,2 < a + b < 1,6 + 3,3$$

$$2 \cdot 4,7 < 2(a + b) < 2 \cdot 4,9$$

$$9,4 < 2(a + b) < 9,8$$

$$9,4 < P < 9,8.$$

Ответ:  $4,80 < S < 5,28$ ;  $9,4 < P < 9,8$ .

5.  $n, n + 1, n + 2, n + 3$  – последовательные натуральные числа.

$n(n + 3) - (n + 1)(n + 2) = n^2 + 3n - n^2 - 2n - n - 2 = -2 < 0$ , значит, произведение первого и последнего числа меньше произведения двух средних чисел.

### Вариант 3

1. а)  $(x - 3)^2 - x(x - 6) = x^2 - 6x + 9 - x^2 + 6x = 9 > 0$ ,

значит,  $(x - 3)^2 > x(x - 6)$ .

б)  $y^2 + 1 - 2(5y - 12) = y^2 + 1 - 10y + 24 = y^2 - 10y + 25 =$

$$= (y - 5)^2 \geq 0, \text{ значит, } y^2 + 1 \geq 2(5y - 12).$$

2. а)  $x < y$

$$8x < 8y;$$

б)  $x < y$

$$-1,4x > -1,4y;$$

в)  $x < y$

$$y > x;$$

$$-5,6y < -5,6x.$$

Ответ: а)  $8x < 8y$ ; б)  $-1,4x > -1,4y$ ; в)  $-5,6y < -5,6x$ .

3. а)  $3,6 < \sqrt{13} < 3,7$

$$10,8 < 3\sqrt{13} < 11,1.$$

б)  $3,6 < \sqrt{13} < 3,7$

$$7,2 < 2\sqrt{13} < 7,4$$

$$-7,4 < -2\sqrt{13} < -7,2.$$

Ответ: а)  $10,8 < 3\sqrt{13} < 11,1$ ; б)  $-7,4 < -2\sqrt{13} < -7,2$ .

$$4. S = x \cdot y \text{ см}^2$$

$$1,1 < x < 1,2$$

$$1,5 < y < 1,6$$

---


$$1,1 \cdot 1,5 < xy < 1,2 \cdot 1,6$$

$$1,65 < xy < 1,92$$

$$1,65 < S < 1,92.$$

$$P = 2(x + y) \text{ см.}$$

$$1,1 < x < 1,2$$

$$1,5 < y < 1,6$$

---


$$1,1 + 1,5 < x + y < 1,2 + 1,6$$

$$2 \cdot 2,6 < 2(x + y) < 2 \cdot 2,8$$

$$5,2 < 2(x + y) < 5,6.$$

$$5,2 < P < 5,6.$$

Ответ:  $1,65 < S < 1,92$ ;  $5,2 < P < 5,6$ .

5.  $n, n + 1, n + 2$  – последовательные натуральные числа.  
 $(n + 1)^2 - n(n + 2) = n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n = 1 > 0$ , значит, квадрат среднего числа больше произведения двух других чисел.

### Вариант 4

1. а)  $(x + 1)^2 - x(x + 2) = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x = 1 > 0$ ,

значит,  $(x + 1)^2 > x(x + 2)$ .

б)  $a^2 + 1 - 2(3a - 4) = a^2 + 1 - 6a + 8 = a^2 - 6a + 9 =$   
 $= (a - 3)^2 \geq 0$ , значит,  $a^2 + 1 \geq 2(3a - 4)$ .

2. а)  $x > y$

$13x > 13y$ ;

б)  $x > y$

$-5,1x < -5,1y$ ;

в)  $x > y$

$y > x$ ;

$2,6y < 2,6x$ .

Ответ: а)  $13x > 13y$ ; б)  $-5,1x < -5,1y$ ; в)  $2,6y < 2,6x$ .

3. а)  $3,3 < \sqrt{11} < 3,4$

$16,5 < 5\sqrt{11} < 17,0$ ;

б)  $3,3 < \sqrt{11} < 3,4$

$-6,6 > -2\sqrt{11} > -6,8$ ;

$-6,8 < -2\sqrt{11} < -6,6$ .

Ответ: а)  $16,5 < 5\sqrt{11} < 17,0$ ; б)  $-6,8 < -2\sqrt{11} < -6,6$ .

4.  $S = c \cdot b$  см<sup>2</sup>

$4,6 < c < 4,7$

$6,1 < b < 6,2$

---

$4,6 \cdot 6,1 < c \cdot b < 4,7 \cdot 6,2$

$28,06 < cb < 29,14$

$28,06 < S < 29,14$ .

$P = 2(c + b)$  см.

$4,6 < c < 4,7$

$6,1 < b < 6,2$

---

$4,6 + 6,1 < c + b < 4,7 + 6,2$

$2 \cdot 10,7 < 2(c + b) < 2 \cdot 10,9$

$21,4 < 2(c + b) < 21,8$

$21,4 < P < 21,8$ .

Ответ:  $28,06 < S < 29,14$ ;  $21,4 < P < 21,8$ .

5.  $6 + m, 5 + m, 4 + m, 3 + m$  – полученная последовательность.

$(5 + m)(4 + m) - (6 + m)(3 + m) = 20 + 5m + 4m + m^2 - 18 - 6m - 3m - m^2 = 2 > 0$ , значит, произведение средних членов последовательности больше произведения её крайних членов.

## Урок 73

### ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ И ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ

**Цели:** ознакомить учащихся с основными понятиями теории множеств, операциями над множествами (пересечение и объединение множеств); формировать умения задавать множества и проводить над ними основные операции.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Проверочная работа.

###### Вариант 1

1. Запишите в виде двойного неравенства  $b = 5,82 \pm 0,01$ .
2. Представьте каждое из чисел  $2\frac{5}{8}$  и  $14\frac{11}{16}$  в виде десятичной дроби. Округлите полученные дроби до сотых и найдите абсолютную и относительную погрешности приближения.

###### Вариант 2

1. Запишите в виде двойного неравенства  $u = 6,75 \pm 0,01$ .
2. Представьте каждое из чисел  $6\frac{3}{4}$  и  $18\frac{7}{8}$  в виде десятичной дроби. Округлите полученные дроби до десятых и найдите абсолютную и относительную погрешности приближения.

##### III. Объяснение нового материала.

Наиболее ответственным шагом при ознакомлении учащихся с теоретико-множественными понятиями является введение неопределяемых понятий множества, его элемента и принадлежности.

###### I блок.

###### 1. Основные понятия.

Одно из основных понятий современной математики – *множество*. Это понятие обычно принимается за первичное и поэтому не определяется через другие.

Когда в математике говорят о множестве (чисел, точек, функций и т. д.), то объединяют эти объекты в одно целое – множество, состоящее из этих объектов (чисел, точек, функций и т. д.). Основатель теории множеств, немецкий математик Георг Кантор (1845–1918), выразил эту мысль следующим образом: «Множество есть многое, мыслимое как единое целое».

*Множество* – это совокупность объектов, объединённых между собой по какому-либо признаку.

Слово «множество» в обычном смысле всегда связывается с большим числом предметов. Например, мы говорим, что в лесу множество деревьев, но если перед домом два дерева, в обычной речи не говорят, что перед домом «множество деревьев».

Математическое же понятие множества не связывается обязательно с большим числом предметов. В математике удобно рассматривать и «множества», содержащие 3; 2 или 1 предмет, и даже «множество», не содержащее ни одного предмета (пустое множество). Например, мы говорим о множестве решений уравнения, до того как узнаем, сколько оно имеет решений.

Произвольные множества обозначают большими латинскими буквами  $A, B, C, \dots$  *Пустое множество*, то есть множество, которое не имеет элементов, обозначается символом  $\emptyset$ .

О предметах, составляющих множество, говорят, что они принадлежат этому множеству или являются его элементами. Элементы множества обозначают малыми латинскими буквами  $a, b, c, \dots$  или одной какой-нибудь буквой с индексом, например  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Предложение «предмет  $a$  принадлежит множеству  $A$ » (или «предмет  $a$  – элемент множества  $A$ ») обозначают символом  $a \in A$ .

## 2. Способы задания множеств.

1) Множество может быть задано непосредственным перечислением всех его элементов (в произвольном порядке). В таком случае названия всех элементов множества записываются в строчку, отделяются между собой запятыми и заключаются в фигурные скобки.

Например:  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  – множество цифр десятичной системы счисления,

Необходимо различать объекты, обозначаемые символами  $a$  и  $\{a\}$ . Символом  $a$  обозначается предмет, символом  $\{a\}$  –

множество, состоящее из одного элемента  $a$  (*единичное множество*). Перечислением всех элементов можно задать лишь конечное множество. Множества, например, всех натуральных ( $N$ ) или всех целых чисел ( $Z$ ) нельзя задать таким способом, так как мы не можем перечислить все  $N$  и все  $Z$  – таких чисел *бесконечное множество*.

2) Имеется другой, универсальный, способ задания множества в том смысле, что этим способом может быть задано не только конечное, но и бесконечное множество. Множество может быть задано указанием *характеристического свойства, то есть такого свойства, которым обладают все элементы этого множества и не обладает ни один предмет, не являющийся его элементом*.

Например:  $\{x \mid x - \text{делятся на } 10\}$ ;

$$A = \{a \mid a - \text{числом, меньше чем } 100\}$$

### 3. Упражнения.

а) Назовите известные вам множества людей (например команда).

б) Запишите множества, элементами которых являются:

1) планеты Солнечной системы;

2) столицы государств;

3) все двузначные числа;

4) числа, делящиеся на 7.

в) Пусть  $A$  – множество чисел, на которые делится 100 без остатка. Верна ли запись:

1)  $5 \in A$ ;

3)  $7 \notin A$ ;

2)  $12 \in A$ ;

4)  $4 \notin A$ .

г) Пусть даны множества  $A = \{a \mid a - \text{число, кратное двум}\}$  и  $B = \{b \mid b - \text{число, кратное шести}\}$ .

Выпишите:

1) два элемента, принадлежащих множеству  $A$ , но не принадлежащих множеству  $B$ ;

2) два элемента, принадлежащих и множеству  $A$ , и множеству  $B$ ;

3) два элемента, не принадлежащих ни множеству  $A$ , ни множеству  $B$ .



## II блок.

### 1. Равенство множеств.

Очень важной особенностью множества является то, что в нём нет одинаковых элементов, вернее, что все они отличны друг от друга. Это значит, можно записать сколь угодно одинаковых элементов, но выступать они будут как один. То есть множество не может содержать одни и те же элементы в нескольких вариантах. Предположим, мы записали множество  $\{7, 9, 7, 11, 7\}$ . В этом множестве элемент 7 повторяется несколько раз, но мы его рассмотрим как один. Поэтому наше множество будет  $\{7, 9, 11\}$ .

Рассмотрим два множества  $\{a, b, c\}$  и  $\{b, a, c\}$ . Эти множества состоят из одних и тех же элементов, хотя они записаны в разном порядке. Такие множества называются равными. Итак, *два множества равны*, если содержат одни и те же элементы.

### 2. Пересечение множеств.

Рассмотрим два множества  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  и  $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ . Составим новое множество  $C$ , в которое запишем общие элементы  $A$  и  $B$ . Общими у них являются элементы 5 и 6, значит,  $C = \{5, 6\}$ . Множество  $C$  является *пересечением* множеств  $A$  и  $B$ , обозначается так:

$$A \cap B = C$$

**Определение:** пересечением двух множеств называют множество, состоящее из всех общих элементов этих множеств.

### 3. Объединение множеств.

Возьмём те же два множества  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  и  $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ . Составим теперь множество  $D$  таким образом, чтобы в него вошли все элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств  $A$  и  $B$ .

Здесь следует ознакомить учащихся с приёмом задания объединения множеств: сперва мы выписываем все элементы множества  $A$ , а затем те элементы множества  $B$ , которые не принадлежат множеству  $A$ . Получим:  $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Множество  $D$  является *объединением* множеств  $A$  и  $B$ , обозначается так:

$$A \cup B = D$$

**Определение:** объединением двух множеств называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств.

4. Упражнения.

а) Верна ли запись?

1)  $\{8, 12, 16, 20\} = \{12, 20, 16, 18\}$ ;

2)  $\{m, n, p, q\} = \{p, m, q, n\}$ ;

3)  $\{3, 4, 3, 5\} = \{3, 4, 5\}$ .

б) Запишите множества, равные:

1)  $\{2, 3, 2, 4, 2, 5\}$ ;

2)  $\{f, f, f, m, m, m\}$ .

в) Даны множества  $A = \{3, 4, 5\}$ ,  $B = \{5, 6, 7, 8\}$ ,  $C = \{2, 4, 8\}$  и  $K = \{1, 3, 5, 7\}$ . Найдите:

1)  $A \cap K$ ;

3)  $A \cap B$ ;

5)  $A \cup K$ ;

7)  $A \cup B$ ;

2)  $A \cap C$ ;

4)  $A \cap K \cap B$ ;

6)  $A \cup C$ ;

8)  $A \cup K \cup B$ .

#### IV. Формирование умений и навыков.

На этом уроке отрабатываются умения задавать множества, правильно оформляя запись, а также находить пересечение и объединение множеств, пользуясь введенными определениями.

№ 799.

$$x = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\},$$

$$y = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}.$$

$$x \cap y = \{11, 13, 17, 19\};$$

$$x \cup y = \{2, 3, 5, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}.$$

– Найдите пересечение и объединение множеств букв, которые используются при записи слов «типография» и «фотография».

Решение

$A = \{т, и, н, о, г, р, а, ф, я\}$  – множество букв, используемых в записи слова «типография»;

$B = \{ф, о, т, г, р, а, и, я\}$  – множество букв, используемых в записи слова «фотография».

$$A \cap B = \{т, и, о, г, р, а, ф, я\},$$

$$A \cup B = \{т, и, н, о, г, р, а, ф, я\}.$$

Примечание. Обращаем внимание учащихся, что в этом случае  $A \cup B = A$ .

### № 801.

а)  $x = \{1, 2, 3, 4\}; y = \{1, 2, 3, 6\}$ .

$$x \cap y = \{1, 2, 3\}; x \cup y = \{1, 2, 3, 4, 6\}.$$

**Примечание.** Подчёркиваем необходимость «упорядоченной» записи множеств, так как в этом случае будет удобнее отыскивать общие элементы множеств.

### № 802.

а) Чтобы число принадлежало пересечению множеств  $A$  и  $B$ , оно должно являться одновременно квадратом натурального числа и кубом натурального числа.

$$1 = 1^2; 1 = 1^3, \text{ значит, } 1 \in A \cap B;$$

$4 = 2^2$ , но не является кубом натурального числа, значит,  $4 \notin A \cap B$ .

$$64 = 8^2, 64 = 4^3, \text{ значит, } 64 \in A \cap B.$$

### V. Итоги урока.

- Какие способы задания множеств существуют?
- Какие два множества являются равными?
- Как называется множество, в котором нет ни одного элемента?
- Что называется пересечением двух множеств?
- Что называется объединением двух множеств?

**Домашнее задание:** 1. № 800, 801 (б), 802 (б).

2. Укажите наибольший и наименьший элементы пересечения множества двузначных чисел, кратных 9, и множества нечётных двузначных чисел.

## Урок 74

### КРУГИ ЭЙЛЕРА

**Цели:** ознакомить учащихся с возможностями иллюстрации соотношения между множествами с помощью кругов Эйлера; продолжить формировать умение находить объединение и пересечение множеств.

### Ход урока

#### I. Организационный момент.

## II. Устная работа.

1. Пусть даны множества  $A = \{x \mid x - \text{имя девочки}\}$  и  $B = \{x \mid x - \text{имя мальчика}\}$ . Выпишите:

а) два элемента, принадлежащих множеству  $A$ , но не принадлежащих множеству  $B$ ;

б) два элемента, принадлежащих множеству  $B$ , но не принадлежащих множеству  $A$ ;

в) два элемента, принадлежащих и множеству  $A$ , и множеству  $B$ ;

г) два элемента, не принадлежащих ни множеству  $A$ , ни множеству  $B$ .

2. Найдите  $A \cap B$ , если:

а)  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  и  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ;

б)  $A = \{x \mid x - \text{двузначное число}\}$  и  
 $B = \{x \mid x - \text{число, меньше } 75\}$ .

3. Найдите  $A \cup B$ , если:

а)  $A = \{17, 18, 19\}$  и  $B = \{3\}$ ;

б)  $A = \{y \mid y - \text{число, меньше } 32\}$  и  
 $B = \{y \mid y - \text{число, больше } 7, \text{ но меньше } 45\}$ .

## III. Объяснение нового материала.

1. Мотивация изучения.

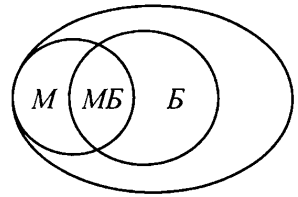
Предложим учащимся для решения задачу, которую достаточно трудно решить без наглядного представления информации.

**Задача.** В классе 35 учеников. Из них 20 занимаются в математическом кружке, 11 – в биологическом, 10 ребят не посещают кружки. Сколько биологов увлекаются математикой?

### Решение

Изобразим различные множества учащихся в виде кругов. Большой круг будет изображать всех учащихся класса. В этот круг поместим два поменьше. Один обозначим буквой  $M$ , и он будет изображать математиков класса. Другой круг обозначим  $B$  – биологи класса. Очевидно, в общей части кругов, обозначенной  $MB$ , окажутся те самые биологи-математики, которые нас интересуют. Теперь посчитаем: всего внутри большого круга 35 ребят, внутри двух меньших  $35 - 10 = 25$  ребят. Внутри «математического» круга  $M$  находятся 20 ребят, значит,

в той части «биологического» круга, которая расположена вне круга  $M$ , находятся  $25 - 20 = 5$  биологов, не посещающих математический кружок. Остальные биологи, их  $11 - 5 = 6$  человек, находятся в общей части кругов  $MB$ . Таким образом, 6 биологов увлекаются математикой.



Ответ: 6 биологов увлекаются математикой.

2. Введение понятия «круги Эйлера».

Сообщаем учащимся, что эти круги называются **кругами Эйлера**.

Один из величайших математиков петербургской академии Леонард Эйлер (1707–1783) за свою долгую жизнь написал более 850 научных работ. В одной из них появились круги, которые «очень подходят для того, чтобы облегчить наши размышления». С помощью этих кругов удобно геометрически иллюстрировать операции над множествами. Можно рисовать не только круги, но и овалы, прямоугольники и другие геометрические фигуры.

По учебнику на с. 169–170 рассматриваем иллюстрацию пересечения и объединения двух множеств с помощью кругов Эйлера.

#### IV. Формирование умений и навыков.

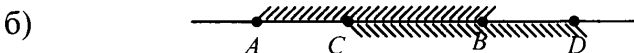
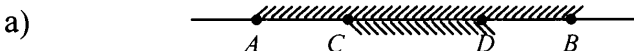
На этом уроке учащиеся решают качественно новые упражнения, в которых необходимо рассматривать множества различной природы, а не только числовые. Востребуются знания из других разделов математики.

#### № 803.

**Задача.** Известно, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  расположены на одной прямой, причём пересечением множеств точек отрезков  $AB$  и  $CD$  являются: а) отрезок  $CD$ ; б) отрезок  $CB$ .

Для каждого случая сделайте чертёж.

Решение



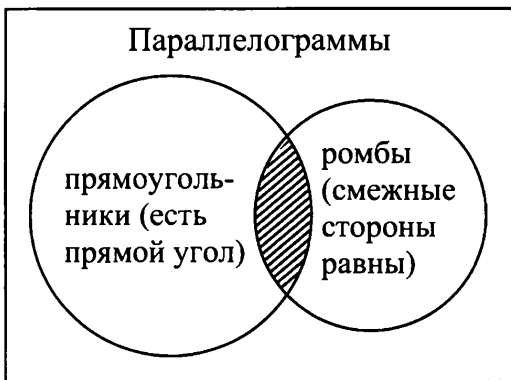
**№ 804 (а).**

Вспомним определения:

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого есть прямой угол.

Ромбом называется параллелограмм, у которого смежные стороны равны.

Изобразим соотношение множества этих фигур с помощью кругов Эйлера.



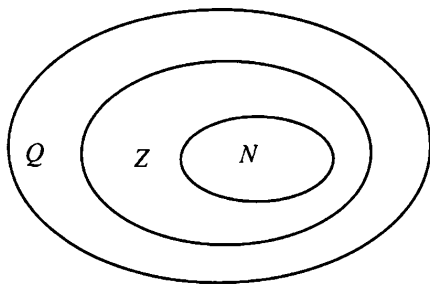
Пересечением двух множеств будет множество параллелограммов, у которых есть прямой угол и равны смежные стороны. Это множество квадратов.

Ответ: множество квадратов.

**№ 805.**

Из темы «действительные числа» учащиеся знают, что  $N \subset Z \subset Q \subset R$ .

- а)  $N \cap Z = N$ ;  $N \cup Z = Z$ ;  
 б)  $Z \cap Q = Z$ ;  $Z \cup Q = Q$ ;  
 в)  $Q \cap I = \emptyset$ ;  $Q \cup I = R$ .

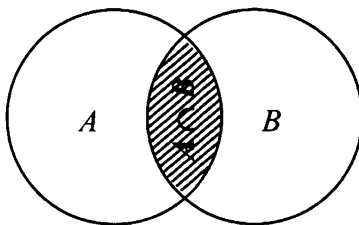
**№ 806.**

$$A = \{x \mid x - \text{кратное } 4\},$$

$$B = \{y \mid y - \text{кратное } 3\}.$$

$A \cap B$  – множество чисел, которые одновременно делятся на 3 и на 4, значит, это множество чисел, кратных 12.

Ответ:  $A \cap B = \{z \mid z - \text{кратное } 12\}$ .

**№ 808 (а).**

$$X \cap Y = \emptyset; \quad X \cup Y = N \setminus \{1\}.$$

Так как по определению:

– натуральное число называется простым, если оно имеет только два различных делителя: 1 и само это число;

– число, имеющее более двух делителей, называется составным;

– число 1 не относится ни к простым, ни к составным, так как имеет только один делитель.

## V. Итоги урока.

– Для чего служат круги Эйлера?

– Как с помощью кругов Эйлера изобразить пересечение множеств? Объединение множеств?

**Домашнее задание:** № 804 (б), 807, 808 (б), 937.

## Урок 75

### АНАЛИТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛИ ЧИСЛОВОГО ПРОМЕЖУТКА

**Цели:** ввести понятие числового промежутка как геометрической модели числового неравенства; рассмотреть различные виды числовых промежутков; формировать умение изображать на координатной прямой числовой промежуток и множество чисел, удовлетворяющих неравенству.

### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

1. Назовите верное неравенство, которое получится, если:

а) к обеим частям неравенства  $-1 < 3$  прибавить число 4; число  $-2$ ;

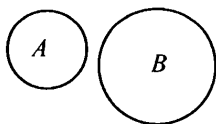
б) из обеих частей неравенства  $-15 < -2$  вычесть число 3; число  $-5$ ;

в) обе части неравенства  $6 > -1$  умножить на 8; на  $-5$ ;

г) обе части неравенства  $9 < 27$  разделить на 9; на  $-3$ ; на  $-1$ .

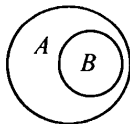
2. Заполните пустые квадратики:

а)



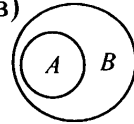
$$A \cap B = \square$$

б)



$$A \cup B = \square$$

в)



$$A \cap B = \square$$

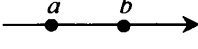
### III. Объяснение нового материала.

#### 1. Актуализация знаний.

Напоминаем учащимся, что алгебра, в частности, занимается тем, что описывает различные реальные ситуации на математическом языке в виде математических моделей, а затем имеет дело уже не с реальными ситуациями, а с этими моделями, используя разные правила, свойства, законы, выработанные в алгебре.

Математические модели бывают не только *алгебраические* (в виде числового равенства, уравнения, неравенства), но и *словесные* (в виде словесного описания реальной ситуации), *графические* (в виде схемы, графика, чертежа). Учащиеся уже знакомы со всеми этими видами моделей. Напоминаем, что алгебраическую модель ещё называют *аналитической*, а графическую – *геометрической*. Чтобы свободно оперировать любыми видами математических моделей, нужно учиться переходить от одного из них к другому.

Например:

| Словесная модель 1 | Аналитическая модель | Геометрическая модель   | Словесная модель 2   |
|--------------------|----------------------|---|--|
| $b$ больше $a$     | $b > a$              |  | Точка с координатой $b$ лежит правее точки с координатой $a$ |

#### 2. Введение нового понятия.

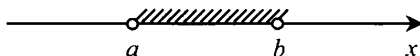
Работаем с представленными выше моделями, причём идём в обратном порядке: от словесной модели 2 к словесной модели 1.

Возьмём произвольную точку  $x$  на координатной прямой, причём эта точка лежит между точками  $a$  и  $b$ . Это означает, что ей соответствует число  $x$ , которое больше  $a$  и меньше  $b$ , то есть  $a < x < b$ . Верно и обратное: для любой точки, лежащей между точками  $a$  и  $b$ , будет выполняться это неравенство.

**Определение:** множество чисел, удовлетворяющих условию  $a < x < b$ , называют *интервалом* и обозначают так:  $(a; b)$ .



На рисунке (геометрическая модель) это множество изображают в виде:



Светлые кружочки означают, что числа  $a$  и  $b$  не принадлежат этому множеству.

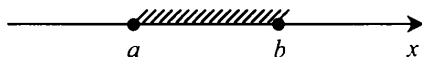
Аналогично вводим определения отрезка, полуинтервала, числового луча, открытого числового луча и числовой прямой.

**Определение:** числовые отрезки, интервалы, полуинтервалы, числовые лучи, открытые числовые лучи и числовая прямая называются **числовыми промежутками**.

### 3. Операции с различными моделями.

Рассматриваем на с. 173 учебника таблицу, в которой представлены такие модели числовых промежутков, как:

- аналитическая (неравенство, задающее числовой промежуток), например  $a \leq x \leq b$ ;
- словесная (обозначение и название числового промежутка), например  $[a; b]$  – числовой промежуток от  $a$  до  $b$ ;
- геометрическая (изображение числового промежутка на координатной прямой), например:



## IV. Формирование умений и навыков.

Все задания этого урока можно разбить на три группы:

- 1) Изобразить на координатной прямой числовой промежуток по его обозначению (создание геометрической модели).
- 2) Назвать числовой промежуток, изображённый на координатной прямой, и обозначить его (создание словесной модели).
- 3) Изобразить на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенству, и записать неравенство, соответствующее изображенному или обозначенному числовому промежутку (переход от аналитической к геометрической модели и наоборот).

Особое внимание уделяем:

- правильным формулировкам;

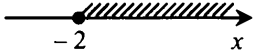
– верному использованию круглых и квадратных скобок при обозначении числового промежутка;

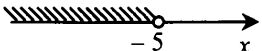
– верному использованию светлых кружков («выколотых» точек) и тёмных при изображении числовых промежутков на координатной прямой.

• № 812 (а, б, д, е), 813, 814,

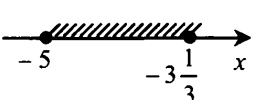
• № 815 (а, г), 816 (в, г).


**№ 815.**

а)  $x \geq -2$ ;   $[-2; +\infty)$ .

г)  $x < -5$ ;   $(-\infty; -5)$ .

**№ 816.**

в)  $-5 \leq x \leq -3\frac{1}{3}$ ;   $\left[-5; -3\frac{1}{3}\right]$ .

г)  $2 < x \leq 6,1$ ;   $(-2; 6,1]$ .

• № 817 (а) (устно), 819 (а, в).

**№ 819.**

а)  $\sqrt{2} \approx 1,4$ ,  $\sqrt{2} \notin (1,5; 2,4)$ .

в)  $\sqrt{5} \approx 2,2$ ,  $\sqrt{5} \in (1,5; 2,4)$ .

– Задайте неравенством числовой промежуток:

а)  ж)  $x \in [2; 7,3]$ ;

б)  з)  $y \in (-\infty; 100)$ ;

в)  и)  $x \in (-8,3; 0]$ ;

г)  к)  $y \in (0; +\infty)$ ;

д)  л)  $x \in (-15; -4)$ ;

е)  м)  $y \in [-60; 100)$ .

## Решение

а)  $0 < x \leq 14$ ;

б)  $y < 17,5$ ;

в)  $x \geq \sqrt{2}$ ;

г)  $\pi < x < 3\pi$ ;

д)  $-11 \leq y \leq -4$ ;

е)  $-15 \leq y < 0$ ;

ж)  $2 \leq x \leq 7,3$ ;

з)  $y < 100$ ;

и)  $-8,3 < x \leq 0$ ;

к)  $y > 0$ ;

л)  $-15 < x < -4$ ;

м)  $-60 \leq y < 100$ .

## V. Итоги урока.

– Что называется числовым промежутком?

– Какие виды числовых промежутков существуют?

– Как выглядит геометрическая модель числового промежутка?

– Как записать аналитическую модель числового промежутка с помощью неравенства?

**Домашнее задание:** № 812 (в, г, ж, з), 815 (б, в), 816 (а, б), 817 (б), 819 (б, г).

## Урок 76

### ПЕРЕСЕЧЕНИЕ И ОБЪЕДИНЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ПРОМЕЖУТКОВ

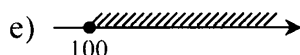
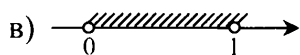
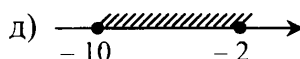
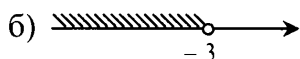
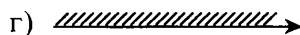
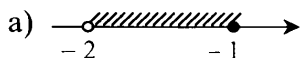
**Цели:** продолжить формирование навыков оперирования аналитической и геометрической моделями числовых промежутков; формировать умение находить пересечение и объединение числовых промежутков.

## Ход урока

### I. Организационный момент.

### II. Устная работа.

1. Назовите числовой промежуток:



ж)  $(-3; +\infty)$ ;

и)  $[5; 17]$ ;

з)  $[-15; 15]$ ;

к)  $(-\infty; 0]$ .

2. Выполните задание: № 818 (в).

### III. Актуализация знаний.

1. Выполните задания: № 821, № 823 (б, в), № 824 (устно).

2. Дайте определения *пересечения двух множеств* и *объединения двух множеств*.

### IV. Объяснение нового материала.

Числовой отрезок – *множество* чисел, удовлетворяющих некоторому числовому неравенству, значит, к нему можно применить определение пересечения и объединения множеств.

Рассматриваем эти определения на конкретных примерах, причём следует охватить различные случаи взаимного расположения.

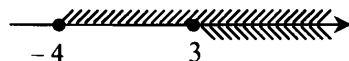
1. Найти пересечение и объединение числовых промежутков  $[1; 5]$  и  $[3; 7]$ .



$$[1; 5] \cap [3; 7] = [3; 5];$$

$$[1; 5] \cup [3; 7] = [1; 7].$$

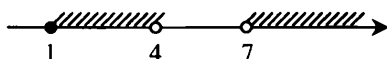
2. Найти пересечение и объединение числовых промежутков  $[-4; +\infty)$  и  $[3; +\infty)$ .



$$[-4; +\infty) \cap [3; +\infty) = [3; +\infty);$$

$$[-4; +\infty) \cup [3; +\infty) = [-4; +\infty).$$

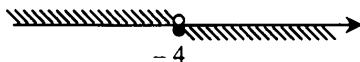
3. Найти пересечение и объединение числовых промежутков  $[1; 4)$  и  $(7; +\infty)$ .



$$[1; 4) \cap (7; +\infty) = \emptyset;$$

$[1; 4) \cup (7; +\infty)$  – не является числовым промежутком.

4. Найти пересечение и объединение промежутков  $(-\infty; -4]$  и  $(-4; +\infty)$ .



$$(-\infty; -4] \cap (-4; +\infty) = \emptyset;$$

$$(-\infty; -4] \cup (-4; +\infty) = (-\infty; +\infty).$$

5. Найти пересечение и объединение промежутков  $(-\infty; 0]$  и  $[0; +\infty)$ .



$$(-\infty; 0] \cap [0; +\infty) = \{0\};$$

$$(-\infty; 0] \cup [0; +\infty) = (-\infty; +\infty).$$

### V. Формирование умений и навыков.

• Выполнение заданий по учебнику.

#### № 825.

а)  $(1; 8) \cap (5; 10) = (5; 8);$

б)  $[-4; 4] \cap [-6; 6] = [-4; 4];$

в)  $(5; +\infty) \cap (7; +\infty) = (7; +\infty);$

г)  $(-\infty; 6) \cap (-\infty; 10) = (-\infty; 6).$

#### № 826.

$$(-4,3; 1) \cap (-3,9; 2) = (-3,9; 1).$$

В полученный интервал входят целые числа:  $-3; -2; -1; 0$ .

О т в е т : четыре числа.



#### № 827.

а)  $[-7; 0] \cup [-3; 5] = [-7; 5];$



## VII. Итоги урока.

– Как изобразить на координатной прямой пересечение числовых промежутков? Объединение числовых промежутков?

– Всегда ли пересечение (объединение) числовых промежутков есть числовой промежуток? Приведите примеры.

**Домашнее задание:** № 822, 823 (а, г), 828, 936.

## Урок 77

### ПОНЯТИЕ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

**Цели:** ввести понятия неравенства с одной переменной и его решения, равносильных неравенств; формировать умение решать неравенства с одной переменной путём перехода к равносильному неравенству.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Проверочная работа.

##### Вариант 1

1. Используя координатную прямую, найдите пересечение промежутков:

а)  $(-2; 10)$  и  $(0; 15)$ ;

б)  $[-3; 6]$  и  $[-1; 1]$ ;      в)  $(-\infty; 2)$  и  $(-2; +\infty)$ .

2. Покажите штриховкой на координатной прямой объединение промежутков:

а)  $[-4; 0]$  и  $[-1; 5]$ ;

б)  $(-3; 3)$  и  $(-6; 6)$ ;      в)  $(-\infty; 5)$  и  $(-\infty; 10)$ .

##### Вариант 2

1. Используя координатную прямую, найдите пересечение промежутков:

а)  $[-4; 5]$  и  $[0; 10]$ ;

б)  $(-3; -1)$  и  $(-2; 4)$ ;      в)  $(-\infty; 5]$  и  $[-5; +\infty)$ .

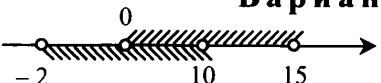
2. Покажите штриховкой на координатной прямой объединение промежутков:


а)  $(-3; 8)$  и  $(1; 9)$ ;


б)  $[-4; 4]$  и  $[-1; 1]$ ;      в)  $(-\infty; 1)$  и  $(-\infty; 4)$ .


Решение заданий проверочной работы


### Вариант 1

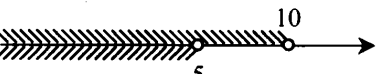
1. а)   $(-2; 10) \cap (0; 15) = (0; 10)$ ;

б)   $[-3; 6] \cap [-1; 1] = [-1; 1]$ ;

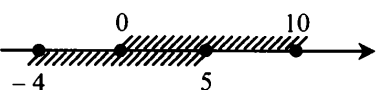
в)   $(-\infty; 2) \cap (-2; +\infty) = (-2; 2)$ .

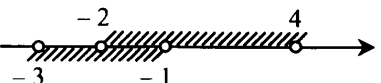
2. а)   $[-4; 0] \cup [-1; 5] = [-4; 5]$ ;

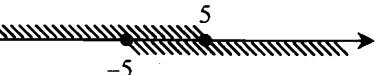
б)   $(-3; 3) \cup (-6; 6) = (-6; 6)$ ;


в)   $(-\infty; 5) \cup (-\infty; 10) = (-\infty; 10)$ .

### Вариант 2

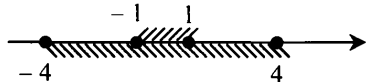
1. а)   $[-4; 5] \cap [0; 10] = [0; 5]$ ;

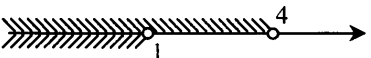
б)   $(-3; -1) \cap (-2; 4) = (-2; -1)$ ;

в)   $(-\infty; 5] \cap [-5; +\infty) = [-5; 5]$ .

2. а)   $(-3; 8) \cup (1; 9) = (-3; 9)$ ;



б)   $[-4; 4] \cup [-1; 1] = [-4; 4];$

в)   $(-\infty; 1) \cup (-\infty; 4) = (-\infty; 4).$

### III. Объяснение нового материала.

1. Неравенство  $5x - 11 > 3$  содержит переменную  $x$ . При подстановке некоторых числовых значений вместо  $x$  мы можем получить как верное, так и неверное числовое неравенство.

Например:

при  $x = 4$  неравенство  $5 \cdot 4 - 11 > 3$  – верное ( $9 > 3$ ),

а при  $x = 2$  неравенство  $5 \cdot 2 - 11 > 3$  – неверное ( $-1 > 3$ ). Говорят, что число 4 является *решением неравенства* или *удовлетворяет неравенству*.

**Определение 1.** Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

**Определение 2.** Решить неравенство – значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

2. Чтобы решать неравенства, необходимо уметь их преобразовывать в неравенство вида  $ax > b$  или  $ax < b$  (где  $a$  и  $b$  – некоторые числа). Неравенства такого вида называют *литейными неравенствами* с одной переменной. Данное неравенство должно быть равносильно исходному.

**Определение 3.** Неравенства, имеющие одни и те же решения, называются *равносильными*.

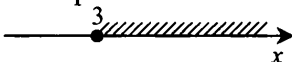
3. По учебнику на с. 177 разобрать основные свойства, используемые при преобразовании неравенства с одной переменной к равносильному неравенству.

4. Разобрать примеры 1, 2 по учебнику со с. 177–178.

### IV. Формирование умений и навыков.

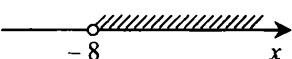
При решении упражнений на этом уроке следует особое внимание уделить правильному использованию свойств при равносильном преобразовании неравенства, а также изображению геометрической модели полученного решения неравенства

в виде числового промежутка. На первых порах в ответ можно записывать все три модели, на пример:

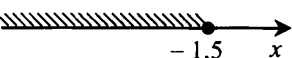
$$x \geq 3; \quad [3; +\infty);$$


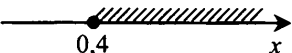
• № 833, 834 (устно), 835, 837.

№ 835.

$$а) x + 8 > 0; \quad x > -8;$$


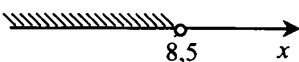
$$б) x - 7 < 0; \quad x < 7;$$

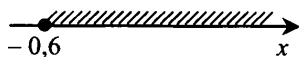

$$в) x + 1,5 \leq 0; \quad x \leq -1,5;$$


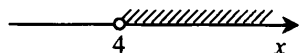
$$г) x - 0,4 \geq 0; \quad x \geq 0,4;$$


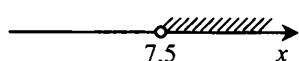
Ответ: а)  $(-8; +\infty)$ ; б)  $(-\infty; 7)$ ; в)  $(-\infty; 1,5]$ ; г)  $[0,4; +\infty)$ .

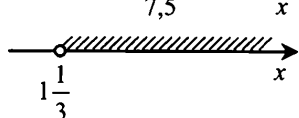
№ 837.

$$а) 2x < 17; \quad x < 17 : 2; \quad x < 8,5;$$


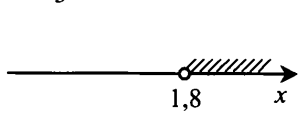
$$б) 5x \geq -3; \quad x \geq -3 : 5; \quad x \geq -0,6;$$


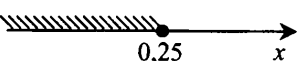
$$в) -12x < -48; \quad x > (-48) : (-12); \quad x > 4;$$



$$г) -x < -7,5; \quad x > (-7,5) : (-1); \quad x > 7,5;$$



$$д) 30x > 40; \quad x > 40 : 30; \quad x > 1\frac{1}{3};$$


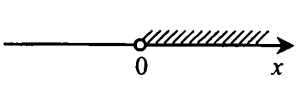
$$е) -15x < -27; \quad x > (-27) : (-15);$$


$$x > \frac{9}{5}; \quad x > 1,8;$$


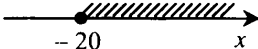
$$ж) -4x \geq -1; \quad x \leq (-1) : (-4); \quad x \leq 0,25;$$


$$з) 10x \leq -24; \quad x \leq (-24) : 10; \quad x \leq -2,4;$$


$$и) \frac{1}{6}x < 2; \quad x < 2 : \frac{1}{6}; \quad x < 2 \cdot 6; \quad x < 12;$$


$$к) -\frac{1}{3}x < 0; \quad x > 0 : \left(-\frac{1}{3}\right); \quad x > 0;$$


л)  $0,02x \geq -0,6$ ;  $x \geq (-0,6) : 0,02$ ;  $x \geq -30$ ; 

м)  $-1,8x \leq 36$ ;  $x \geq 36 : (-1,8)$ ;  $x \geq -20$ ; 

Ответ: а)  $(-\infty; -8,5)$ ; б)  $[-0,6; +\infty)$ ; в)  $(4; +\infty)$ ; г)  $(7,5; +\infty)$ ;  
 д)  $\left(1\frac{1}{3}; +\infty\right)$ ; е)  $(1,8; +\infty)$ ; ж)  $(-\infty; 0,25]$ ; з)  $(-\infty; -2,4]$ ; и)  $(-\infty; 12)$ ;  
 к)  $(0; +\infty)$ ; л)  $[-30; +\infty)$ ; м)  $[-20; +\infty)$ .

• № 838, 841.

## V. Итоги урока.

- Что называется решением неравенства с одной переменной?
- Что означает «решить неравенство»?
- Какие неравенства называются равносильными?
- Какие свойства используются для преобразования неравенства в равносильное?

Домашнее задание: № 836, 839, 840.

## Урок 78

### РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

**Цель:** продолжить формирование умения решать неравенства с одной переменной путём перехода к равносильному неравенству.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

1. Решите неравенство:

а)  $3x < 42$ ;

в)  $-4x < 24$ ;

б)  $5x > 115$ ;

г)  $-6x > -102$ .

2. Назовите неравенство, множеством решений которого служит промежуток:

а)  $(-\infty; 3]$ ;

в)  $[0; +\infty)$ ;

б)  $(15; +\infty)$ ;

г)  $(-\infty; 2)$ .

3. Какие из чисел  $-18$ ;  $10$ ;  $8$ ;  $-3$ ;  $11$  являются решениями неравенства  $3x \leq 24$ ?

### III. Актуализация знаний.

– Дайте определение решения неравенства с одной переменной.

– Что значит решить неравенство?

– Какие неравенства называются равносильными?

– Сформулируйте свойства равносильности неравенств, используемые при решении неравенства с одной переменной.

### IV. Формирование умений и навыков.

Задания этого урока можно разбить на две группы:

1) Решение неравенств приведением к равносильному.

2) Составление неравенства по условию и последующее решение.

• Выполнение заданий: № 842 (а, в), 843 (а), 844.

#### № 842.

а) Составим неравенство:

$$2x - 1 > 0; \quad 2x > 1; \quad x > 1 : 2; \quad x > 0,5.$$

в) Составим неравенство:

$$5 - 3c > 80; \quad -3c > 75; \quad c < 75 : (-3); \quad c < -25.$$

Ответ: а)  $x > 0,5$ ; в)  $c < -25$ .

#### № 843.

а) Составим неравенство:

$$2a - 1 < 7 - 1,2a; \quad 2a + 1,2a < 7 + 1; \quad 3,2a < 8; \quad a < 8 : 3,2; \\ a < 2,5.$$

Ответ: при  $a < 2,5$ .

– Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству: а)  $5x \leq 25$ ; б)  $-x > 15$ .

#### Решение

а)  $5x \leq 25$ ;  $x \leq 25 : 5$ ;  $x \leq 5$ .

Наибольшее целое число  $x = 5$ .



$$\text{б) } -x > 15; \quad x < 15 : (-1); \quad x < -15.$$

Наибольшее целое число  $x = -16$   
(так как  $-15$  не входит в данный открытый числовой луч).

Ответ: а) 5; б)  $-16$ .



**№ 844.**

$$\text{а) } 5(x - 1) + 7 \leq 1 - 3(x + 2),$$

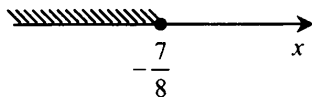
$$5x - 5 + 7 \leq 1 - 3x - 6,$$

$$5x + 3x \leq 5 - 7 + 1 - 6,$$

$$8x \leq -7,$$

$$x \leq -7 : 8,$$

$$x \leq -\frac{7}{8}.$$



$$\left(-\infty; -\frac{7}{8}\right]$$

$$\text{б) } 4(a + 8) - 7(a - 1) < 12,$$

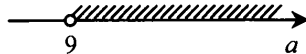
$$4a + 32 - 7a + 7 < 12,$$

$$4a - 7a < -32 - 7 + 12,$$

$$-3a < -27,$$

$$a > (-27) : (-3),$$

$$a > 9.$$



$$(9; +\infty)$$

$$\text{в) } 4(b - 1,5) - 1,2 \geq 6b - 1,$$

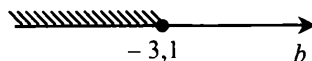
$$4b - 6 - 1,2 \geq 6b - 1,$$

$$4b - 6b \geq 6 + 1,2 - 1,$$

$$-2b \geq 6,2,$$

$$b \leq 6,2 : (-2),$$

$$b \leq -3,1.$$



$$(-\infty; -3,1]$$

$$\text{г) } 1,7 - 3(1 - m) \leq -(m - 1,9),$$

$$1,7 - 3 + 3m \leq -m + 1,9,$$

$$3m + m \leq -1,7 + 3 + 1,9,$$

$$4m \leq 3,2,$$

$$m \leq 3,2 : 4,$$

$$m \leq 0,8.$$



$$(-\infty; 0,8]$$

$$\text{д) } 4x > 12(3x - 1) - 16(x + 1),$$

$$4x > 36x - 12 - 16x - 16,$$

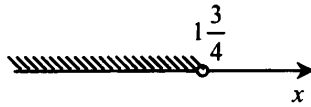
$$4x - 36x + 16x > -12 - 16,$$

$$-16x > -28,$$

$$x < (-28) : (-16),$$

$$x < \frac{7}{4},$$

$$x < 1\frac{3}{4}.$$



$$\left(-\infty; 1\frac{3}{4}\right)$$

е)  $a + 2 < 5(2a + 8) + 13(4 - a),$

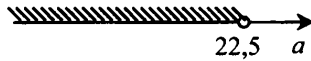
$$a + 2 < 10a + 40 + 52 - 13a,$$

$$a - 10a + 13a < -2 + 40 + 52,$$

$$4a < 90,$$

$$a < 90 : 4,$$

$$a < 22,5.$$



$$(-\infty; 22,5)$$

ж)  $6y - (y + 8) - 3(2 - y) \leq 2,$

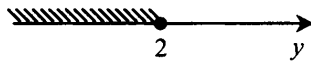
$$6y - y - 8 - 6 + 3y \leq 2,$$

$$6y - y + 3y \leq 8 + 6 + 2,$$

$$8y \leq 16,$$

$$y \leq 16 : 8,$$

$$y \leq 2.$$



$$(-\infty; 2]$$

ОТВЕТ: а)  $\left(-\infty; -\frac{7}{8}\right]$ ; б)  $(9; +\infty)$ ; в)  $(-\infty; -3,1]$ ; г)  $(-\infty; 0,8]$ ;

д)  $\left(-\infty; 1\frac{3}{4}\right)$ ; е)  $(-\infty; 22,5)$ ; ж)  $(-\infty; 2]$ .

• № 846, № 847 (а, б), № 848 (а, б).

**№ 846.**

а)  $a(a - 4) - a^2 > 12 - 6a,$

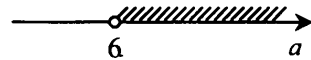
$$a^2 - 4a - a^2 > 12 - 6a,$$

$$a^2 - 4a - a^2 + 6a > 12,$$

$$2a > 12,$$

$$a > 12 : 2,$$

$$a > 6.$$



$$(6; +\infty)$$

б)  $(2x - 1)2x - 5x < 4x^2 - x,$

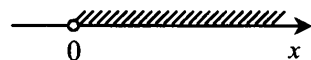
$$4x^2 - 2x - 5x < 4x^2 - x,$$

$$4x^2 - 2x - 5x - 4x^2 + x < 0,$$

$$-6x < 0,$$

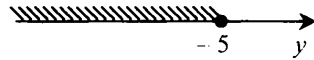
$$x > 0 : (-6),$$

$$x > 0.$$



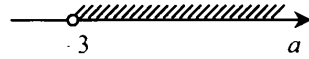
$$(0; +\infty)$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad & 5y^2 - 5y(y + 4) \geq 100, \\ & 5y^2 - 5y^2 - 20y \geq 100, \\ & -20y \geq 100, \\ & y \leq 100 : (-20), \\ & y \leq -5. \end{aligned}$$



$$(-\infty; -5]$$

$$\begin{aligned} \text{г)} \quad & 6a(a - 1) - 2a(3a - 2) < 6, \\ & 6a^2 - 6a - 6a^2 + 4a < 6, \\ & -2a < 6, \\ & a > 6 : (-2), \\ & a > -3. \end{aligned}$$

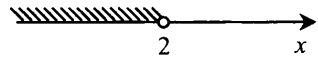


$$(-3; +\infty)$$

ОТВЕТ: а)  $(6; +\infty)$ ; б)  $(0; +\infty)$ ; в)  $(-\infty; -5]$ ; г)  $(-3; +\infty)$ .

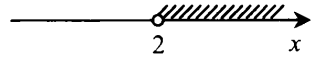
### № 847.

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & 0,2x^2 - 0,2(x - 6)(x + 6) > 3,6x, \\ & 0,2x^2 - 0,2(x^2 - 36) > 3,6x, \\ & 0,2x^2 - 0,2x^2 + 7,2 - 3,6x > 0, \\ & -3,6x > -7,2, \\ & x < (-7,2) : (-3,6), \\ & x < 2. \end{aligned}$$



$$(-\infty; 2)$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & (2x - 5)^2 - 0,5x < (2x - 1)(2x + 1) - 15, \\ & 4x^2 - 20x + 25 - 0,5x < 4x^2 - 1 - 15, \\ & 4x^2 - 20x - 0,5x - 4x^2 < -25 - 1 - 15, \\ & -20,5x < -41, \\ & x > (-41) : (-20,5), \\ & x > 2. \end{aligned}$$

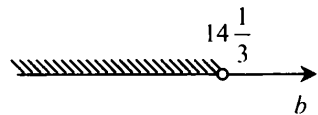


$$(2; +\infty)$$

ОТВЕТ: а)  $(-\infty; 2)$ ; б)  $(2; +\infty)$ .

### № 848.

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & 4b(1 - 3b) - (b - 12b^2) < 43, \\ & 4b - 12b^2 - b + 12b^2 < 43, \\ & 3b < 43, \\ & b < 43 : 3, \\ & b < 14\frac{1}{3}. \end{aligned}$$



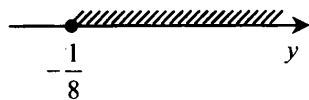
$$\left(-\infty; 14\frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & 3y^2 - 2y - 3y(y - 6) \geq -2, \\ & 3y^2 - 2y - 3y^2 + 18y \geq -2, \\ & 16y \geq -2, \end{aligned}$$

$$y \geq -2 : 16,$$

$$y \geq -\frac{1}{8}.$$

$$\left[-\frac{1}{8}; +\infty\right)$$



Ответ: а)  $\left(-\infty; 14\frac{1}{3}\right)$ ; б)  $\left[-\frac{1}{8}; +\infty\right)$ .

## V. Итоги урока.

- Что значит решить неравенство с одной переменной?
- Какие преобразования приводят неравенство к равносильному?

– Какие виды записи решения неравенства существуют?

Домашнее задание: № 842 (б), 843 (б), 845, 847 (в, г), 848 (в, г), 871 (а).

## Урок 79

### РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ДРОБИ

**Цели:** разобрать способ решения неравенств с одной переменной, содержащих дроби; продолжить формирование навыков решения неравенств путём перехода к равносильным неравенствам.

### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Математический диктант.

##### Вариант 1

##### [Вариант 2]

1. Запишите числовой промежуток, служащий множеством решений неравенства  $x \leq 3$ .  $[y > -8]$

2. Запишите неравенство, множеством решений которого служит промежуток  $(-3; +\infty)$ .  $[(-\infty; 7)]$

3. Решите неравенство:

$$2x - 1 \leq 2(2x - 3).$$

$$[3(2x + 1) \geq 3x + 1]$$

4. Решите неравенство:

$$5(a^2 - 1) - 5a(a + 2) > 3.$$

$$[6x^2 - 3x(2x + 4) > 48]$$



Ответы:

|   | Вариант 1                            | Вариант 2                            |
|---|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1 | $(-\infty; 3]$                       | $(-8; +\infty)$                      |
| 2 | $x > -3$                             | $x < 7$                              |
| 3 | $\left[2\frac{1}{2}; +\infty\right)$ | $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ |
| 4 | $(-\infty; -0,8)$                    | $(-\infty; -4)$                      |

### III. Объяснение нового материала.

Проверить выполнение домашнего задания: № 871 (а).

Рассмотреть по учебнику пример 3 на с. 178.

### IV. Формирование умений и навыков.

В предлагаемых заданиях необходимо уметь находить общий знаменатель дробей, входящих в запись уравнения, затем домножить обе части неравенства на общий знаменатель и решить полученное неравенство. Также следует уделять внимание изображению множества решений на координатной прямой.

#### № 849.

а)  $\frac{2x}{5} > 1$ ;  $\frac{2x}{5} \cdot 5 > 1 \cdot 5$ ;  $2x > 5$ ;  $x > 5 : 2$ ;  $x > 2,5$ .

д)  $2 > \frac{6-x}{5}$ ;  $2 \cdot 5 > \frac{6-x}{5} \cdot 5$ ;  $10 > 6-x$ ;  $x > 6-10$ ;  $x > -4$ .

ж)  $\frac{12-7x}{42} \geq 0$ ;  $\frac{12-7x}{42} \cdot 42 \geq 0 \cdot 42$ ;  $12-7x \geq 0$ ;  $-7x \geq -12$ ;

$$x \leq (-12) : (-7); \quad x \leq 1\frac{5}{7}.$$

з)  $\frac{1}{3}(x+15) > 4$ ;  $\frac{1}{3}(x+15) \cdot 3 > 4 \cdot 3$ ;  $x+15 > 12$ ;

$$x > 12-15; \quad x > -3.$$

и)  $6 \leq \frac{2}{7}(x+4)$ ;  $6 \cdot 7 \leq \frac{2}{7}(x+4) \cdot 7$ ;  $42 \leq 2x+8$ ;

$$-2x \leq 8-42; \quad -2x \leq -34; \quad x \geq 17.$$

Ответ: а)  $x > 2,5$ ; д)  $x > -4$ ; ж)  $x \leq 1\frac{5}{7}$ ; з)  $x > -3$ ; и)  $x \geq 17$ .

**№ 851.**

$$a) \frac{7-2y}{6} > \frac{3y-7}{12} \quad / \cdot 12$$

$$2(7-2y) > 3y-7,$$

$$14-4y > 3y-7,$$

$$-4y-3y > -14-7,$$

$$-7y > -21,$$

$$y < (-21) : (-7),$$

$$y < 3.$$

$$b) 5y-1 > \frac{3y-1}{4} \quad / \cdot 4$$

$$4(5y-1) > 3y-1,$$

$$20y-4 > 3y-1,$$

$$20y-3y > 4-1,$$

$$17y > 3,$$

$$y > \frac{3}{17}.$$

Ответ: а) при  $y < 3$ ; б) при  $y > \frac{3}{17}$ .

**№ 852.**

$$б) \frac{3y}{2} - \frac{y}{3} \geq 2 \quad / \cdot 6 \quad \text{г) } y + \frac{y}{2} > 3 \quad / \cdot 2 \quad \text{е) } \frac{3x}{4} - 2x < 0 \quad / \cdot 4$$

$$3 \cdot 3y - 2y \geq 2 \cdot 6,$$

$$2y + y > 6,$$

$$3x - 8x < 0,$$

$$9y - 2y \geq 12,$$

$$3y > 6,$$

$$-5x < 0,$$

$$7y \geq 12,$$

$$y > 2.$$

$$x > 0 : (-5),$$

$$y \geq 12 : 7,$$

$$(2; +\infty).$$

$$x > 0.$$

$$y \geq 1 \frac{5}{7} \cdot \left[ 1 \frac{5}{7}; +\infty \right)$$

$$(0; +\infty).$$

Ответ: б)  $\left[ 1 \frac{5}{7}; +\infty \right)$ ; г)  $(2; +\infty)$ ; е)  $(0; +\infty)$ .

**№ 853.**

$$б) \frac{5-2a}{4} \geq 2a \quad / \cdot 4$$

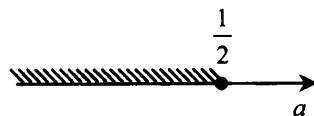
$$5-2a \geq 8a,$$

$$-2a-8a \geq -5,$$

$$-10a \geq -5,$$

$$a \leq (-5) : (-10),$$

$$a \leq \frac{1}{2},$$



$$\left( -\infty; \frac{1}{2} \right]$$

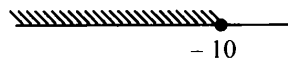
$$г) \frac{2y}{5} - \frac{y}{2} \geq 1 \quad / \cdot 10$$

$$2 \cdot 2y - 5y \geq 10,$$

$$-y \geq 10,$$

$$y \leq -10.$$

$$(-\infty; -10]$$



ОТВЕТ: б)  $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$ ; г)  $(-\infty; -10]$ .

№ 854.

а)  $\frac{3+x}{4} + \frac{2-x}{3} < 0 \quad / \cdot 12$

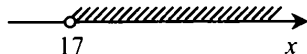
$$3(3+x) + 4(2-x) < 12 \cdot 0,$$

$$9 + 3x + 8 - 4x < 0,$$

$$3x - 4x < -9 - 8,$$

$$-x < -17,$$

$$x > 17.$$



$$(17; +\infty)$$

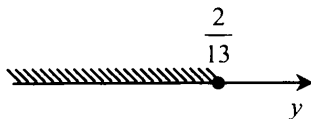
б)  $\frac{4-y}{5} - 5y \geq 0 \quad / \cdot 5$

$$4 - y - 25y \geq 0,$$

$$-26y \geq -4,$$

$$y \leq (-4) : (-26),$$

$$y \leq \frac{2}{13}.$$



$$\left(-\infty; \frac{2}{13}\right]$$

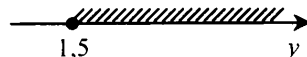
в)  $y - \frac{2y-1}{4} \geq 1 \quad / \cdot 4$

$$4y - 2y + 1 \geq 4$$

$$2y \geq 3$$

$$y \geq 3 : 2$$

$$y \geq 1,5$$



$$[1,5; +\infty)$$

г)  $x - \frac{x-3}{5} + \frac{2x-1}{10} \leq 4 \quad / \cdot 10$

$$10x - 2(x-3) + 2x - 1 \leq 40,$$

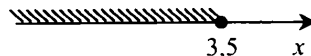
$$10x - 2x + 6 + 2x - 1 \leq 40,$$

$$10x \leq -6 + 1 + 40,$$

$$10x \leq 35,$$

$$x \leq 35 : 10,$$

$$x \leq 3,5.$$



$$(-\infty; 3,5]$$

$$д) \frac{y-1}{2} - 1 + \frac{2y-1}{6} > y \quad / \cdot 6$$

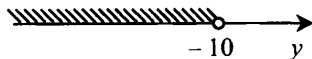
$$3(y-1) - 6 + 2y - 1 > 6y,$$

$$3y - 3 - 6 + 2y - 1 > 6y,$$

$$5y - 6y > 10,$$

$$-y > 10,$$

$$y < 10.$$



$$(-\infty; -10)$$

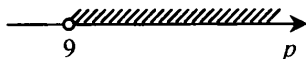
$$е) p - \frac{p-1}{2} - \frac{p+3}{4} > 2 \quad / \cdot 4$$

$$4p - 2(p-1) - p - 3 > 8$$

$$4p - 2p + 2 - p - 3 > 8$$

$$p > 8 + 1$$

$$p > 9$$



$$(9; +\infty)$$

Ответ: а)  $(17; +\infty)$ ; б)  $\left(-\infty; \frac{2}{13}\right]$ ; в)  $[1,5; +\infty)$ ; г)  $(-\infty; 3,5]$ ;

д)  $(-\infty; -10)$ ; е)  $(9; +\infty)$ .

### № 856.

$$б) \frac{3b-1}{2} - \frac{1+5b}{4} < 0 \quad / \cdot 4$$

$$2(3b-1) - 1 - 5b < 0,$$

$$6b - 2 - 1 - 5b < 0,$$

$$b < 3.$$

Ответ: при  $b < 3$ .

### V. Итоги урока.

– Что значит решить неравенство с одной переменной?

– Каков алгоритм решения неравенства с одной переменной, содержащего дробь?

**Домашнее задание:** № 850, 851 (б, г), 852 (а, в, д), 855, 856 (а).

## Урок 80

### РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ВИДА $0 \cdot x > b$ ИЛИ $0 \cdot x < b$ , ГДЕ $b$ – НЕКОТОРОЕ ЧИСЛО

**Цели:** рассмотреть решение неравенств, которые либо не имеют решений, либо их решением является любое число; продолжить формирование умения решать неравенства с одной переменной, а также задачи, сводящиеся к решению таких неравенств.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Проверочная работа.

##### Вариант 1

1. Решите неравенство:

а)  $\frac{2x}{5} - x > 3$ ;

б)  $\frac{x-1}{3} - 2x > \frac{3x+1}{2}$ .

2. При каких значениях  $b$  двучлен  $2b + 11$  принимает положительные значения?

##### Вариант 2

1. Решите неравенство:

а)  $\frac{3x}{4} - x > 2$ ;

б)  $\frac{2x-1}{5} - 3x > \frac{10x+1}{5}$ .

2. При каких значениях  $a$  двучлен  $12 - a$  принимает положительные значения?

Ответ:

|   | Вариант 1   | Вариант 2   |
|---|---|---|
| 1 | а) $(-\infty; -5)$ ; б) $\left(-\infty; -\frac{5}{19}\right)$ | а) $(-\infty; -8)$ ; б) $\left(-\infty; -\frac{2}{23}\right)$ |
| 2 | $(-5,5; +\infty)$   | $(-\infty; 12)$   |

##### III. Устная работа.

1. Решите неравенство:

а)  $2x + 1 > 5$ ;

б)  $-3x + 9 \leq 0$ ;

в)  $\frac{x}{7} < 0$ ;

г)  $-\frac{17}{x} \geq 0$ ;

д)  $\frac{2x}{x^2 + 1} \leq 0$ ;

е)  $\frac{-3}{x+8} < 0$ .

2. Какие из чисел  $0$ ;  $7$ ;  $-4$ ;  $6$ ;  $\frac{7}{3}$  являются решением неравенства  $3x - 12 \geq 6$ ?

#### IV. Объяснение нового материала.

##### 1. Создание проблемной ситуации.

На предыдущих уроках мы решали неравенства вида  $ax > b$  ( $ax < b$ ), где  $a \neq 0$ . Алгоритм решения был прост: мы преобразовывали неравенства, приводя к такому виду, а затем делили обе части неравенства на коэффициент  $a$  (с учетом знака) и получали числовой промежуток в качестве решения. Попробуем применить этот алгоритм к следующему заданию:

$$2(x + 8) - 5x < 4 - 3x,$$

$$2x + 16 - 5x < 4 - 3x,$$

$$2x - 5x + 3x < -16 + 4,$$

$$0 \cdot x < -12.$$

Наш алгоритм «не работает» – на нуль делить нельзя. Замечаем, неравенство будет иметь решение, если при подстановке какого-то числа вместо  $x$  мы получим верное неравенство. Но в данном случае при любом значении  $x$  неравенство обращается в числовое  $0 < -12$ , которое является неверным, значит, исходное неравенство не имеет решений.

##### 2. Самостоятельное решение уравнения.

$$5(x + 11) - 9x < 65 - 4x,$$

$$5x + 55 - 9x < 65 - 4x,$$

$$5x - 9x + 4x < 65 - 55,$$

$$0 \cdot x < 10.$$

Замечаем, что при любом значении  $x$  неравенство обращается в верное числовое неравенство  $0 < 10$ , значит, решением является любое число.

##### 3. Общий вывод.

Неравенства вида  $0 \cdot x > b$  ( $0 \cdot x < b$ ), а значит, и неравенства, равносильные данным, либо не имеют решений, либо их решением является любое число (множество решений либо  $\emptyset$ , либо  $(-\infty; +\infty)$ ).

## V. Формирование умений и навыков.

Задания, решаемые на этом уроке, можно разбить на три группы:

- 1) Решение неравенств, сводящихся к неравенствам вида  $0 \cdot x > b$  ( $0 \cdot x < b$ );
  - 2) Решение задач, сводящихся к решению неравенств с одной переменной;
  - 3) Решение заданий повышенной трудности.
- Выполнение заданий по учебнику.

### № 857 (а, б).

$$\begin{aligned} \text{а) } 31(2x + 1) - 12x &> 50x, \\ 62x + 31 - 12x &> 50x, \\ 62x - 12x - 50x &> -31, \\ 0 \cdot x &> -31, \end{aligned}$$

при любом значении  $x$  имеем верное неравенство  $0 > -31$ , значит,  $x$  – любое число.

$$\text{б) } x + 4 - \frac{x}{3} < \frac{2x}{3} \quad / \cdot 3$$

$$\begin{aligned} 3x + 12 - x &< 2x, \\ 3x - x - 2x &< -12, \\ 0 \cdot x &< -12, \end{aligned}$$

при любом значении  $x$  имеем неверное неравенство  $0 < -12$ , значит, неравенство не имеет решений.

Ответ: а)  $x$  – любое число; б) нет решений.

### № 858.

$$y > 0, \text{ если } 2x + 13 > 0; \quad 2x > -13; \quad x > -6,5;$$

$$y < 0, \text{ если } 2x + 13 < 0; \quad 2x < -13; \quad x < -6,5.$$

Ответ:  $(-6,5; +\infty)$ ;  $(-\infty; -6,5)$ .

### № 859 (а, в, д).

$$\text{а) при } 2x - 4 \geq 0; \quad 2x \geq 4; \quad x \geq 2.$$

$$\text{в) при } \frac{1+3a}{25} \geq 0; \quad 1+3a \geq 0; \quad 3a \geq -1; \quad a \geq -\frac{1}{3}.$$

$$\text{д) при } -3(1-5x) \geq 0; \quad 1-5x \leq 0; \quad -5x \leq -1; \quad x \geq (-1) : (-5); \\ x \geq 0,2.$$

Ответ: а) при  $x \geq 2$ ; в) при  $a \geq -\frac{1}{3}$ ; д) при  $x \geq 0,2$ .

**№ 861 (а).**

а)  $1,6 - (3 - 2y) < 5,$

$1,6 - 3 + 2y < 5,$

$2y < 5 - 1,6 + 3,$

$2y < 6,4,$

$y < 3,2.$

$(-\infty; 3,2)$



Наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству, равно 3.

Ответ: 3.

**№ 862 (а).**

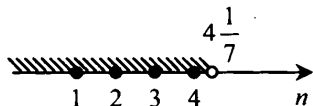
а)  $(2 - 2n) - (5n - 27) > 0,$

$2 - 2n - 5n + 27 > 0,$

$-7n > -29,$

$n < (-29) : (-7),$

$n < 4\frac{1}{7}.$



Данному неравенству удовлетворяют натуральные числа 1, 2, 3, 4.

Ответ: 1; 2; 3; 4.

**№ 865.**

Пусть  $x$  см – длина другой стороны прямоугольника, тогда его периметр равен  $2 \cdot (x + 6)$  см; периметр квадрата равен  $4 \cdot 4$  см, то есть 16 см. Зная, что периметр прямоугольника меньше периметра квадрата, составим неравенство:

$2(x + 6) < 16,$

$2x + 12 < 16,$

$2x < 4,$

$x < 2.$

Ответ: меньше 2 см.

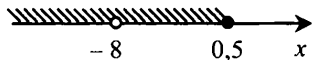
• Задания повышенной трудности для сильных учащихся: № 860 (а), 863, 869.

**№ 860 (а).**

В область определения функции  $y = \frac{\sqrt{7-14x}}{x+8}$  входят значения  $x$ , для которых  $7 - 14x \geq 0$  и  $x + 8 \neq 0$ .



$$\begin{aligned}
 7 - 14x &\geq 0, & x + 8 &\neq 0, \\
 -14x &\geq -7, & x &\neq -8. \\
 x &\leq (-7) : (-14), \\
 x &\leq 0,5;
 \end{aligned}$$



Ответ:  $(-\infty; -8) \cup (-8; 0,5]$ .

**Примечание.** На этом примере учащиеся видят, что если в решении в полученном числовом промежутке есть «выколотая» точка, то ответ мы записываем в виде объединения числовых промежутков.

### № 863.

$(a + 5)x^2 + 4x - 20 = 0$  – квадратное уравнение,

$$D_1 = 4 - (a + 5) \cdot (-20) = 4 + 20a + 100 = 20a + 104.$$

Уравнение не имеет корней, если  $D_1 < 0$ , то есть

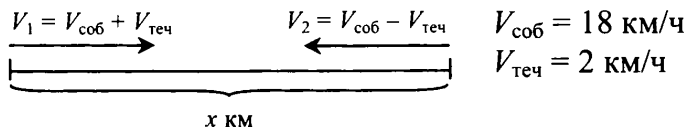
$$\begin{aligned}
 20a + 104 &< 0, \\
 20a &< -104, \\
 a &< (-104) : 20, \\
 a &< -5,2.
 \end{aligned}$$

Ответ: при  $a < -5,2$ .

**Примечание.** Необходимо сообщить учащимся, что данное уравнение представляет собой уравнение с параметром  $a$  и переменной  $x$ .

### № 869.

Анализ:



Пусть  $x$  км – расстояние, на которое могут отъехать туристы, тогда по течению они плыли со скоростью  $18 + 2$ , то есть  $20$  км/ч и против течения – со скоростью  $18 - 2$ , то есть  $16$  км/ч, и на путь по течению они затратили  $\frac{x}{20}$  ч, а против течения  $\frac{x}{16}$  ч.

Зная, что туристы должны вернуться к стоянке не позднее, чем через 3 часа, составим неравенство:

$$\frac{x}{20} + \frac{x}{16} \leq 3 \quad / \cdot 80$$

$$4x + 5x \leq 240,$$

$$9x \leq 240, \quad x \leq 26\frac{2}{3}. \quad \text{Ответ: не более } 26\frac{2}{3} \text{ км.}$$

## VI. Итоги урока.

– Сколько решений может иметь неравенство с одной переменной?

– В каком случае неравенство не имеет решений? Приведите примеры.

– В каком случае решением неравенства является любое число? Приведите примеры.

**Домашнее задание:** № 857 (в, г), 859 (б, г, е), 861 (б), 862 (б), 866, 867.\*

## Урок 81

### ПОНЯТИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

**Цели:** ввести понятия системы неравенств с одной переменной, решения системы неравенств; формировать умение решать системы неравенств с помощью геометрической модели числовых промежутков.

#### Ход урока

**I. Организационный момент.**

**II. Проверочная работа.**

#### Вариант 1

1. Решить неравенство:

а)  $2x - 1 \leq 2(x - 1)$ ;

б)  $3x < 7\left(1 + \frac{3}{7}x\right)$ .

2. При каких значениях  $x$  функция  $y = 0,5x - 11$  принимает отрицательные значения?

#### Вариант 2

1. Решить неравенство:

а)  $3(x + 1) \geq 3x + 1$ ;

б)  $8\left(\frac{1}{2}y - 2\right) > 4y$ .

2. При каких значениях  $x$  функция  $y = 1,5x - 9$  принимает положительные значения?

## Ответы:

|   | Вариант 1                        | Вариант 2                        |
|---|----------------------------------|----------------------------------|
| 1 | а) нет решений<br>б) $x$ – любое | а) $x$ – любое<br>б) нет решений |
| 2 | $(-\infty; 22)$                  | $(6; +\infty)$                   |

### III. Актуализация знаний.

1. Изобразите на координатной прямой и запишите, используя введенные обозначения, промежуток, задаваемый условием:

а)  $x > 1,5$ ;

в)  $0 < x \leq 1$ ;

б)  $x \leq 3,2$ ;

г)  $-5 \leq x \leq -3$ .

2. Используя координатную прямую, найдите пересечение промежутков:

а)  $(-\infty; 6]$  и  $(3; +\infty)$ ;

в)  $(-3; 0]$  и  $(0; +\infty)$ ;

б)  $(-\infty; 2)$  и  $[4; +\infty)$ ;

г)  $(-\infty; 4)$  и  $(-\infty; 0]$ .

### IV. Объяснение нового материала.

Объяснение материала проводится в три этапа.

На первом этапе рассматривается задача, решение которой приводит к понятию «система неравенств с одной переменной» и «решение системы неравенств с одной переменной». На втором этапе рассматривается способ решения системы неравенств. На третьем этапе приводятся различные примеры решения систем неравенств.

1-й этап.

Рассматриваем задачу со с. 184 учебника.

Анализ текстовой задачи показывает две основных зависимости, которые могут быть записаны в форме неравенств. Требуется найти значения переменной, удовлетворяющие одновременно обоим неравенствам.

Теперь появляется возможность ввести новое понятие. Сообщаем учащимся, что в тех случаях, когда нужно найти общее решение двух и более неравенств, говорят, что требуется решить *систему неравенств*. Затем вводим определение:

Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.

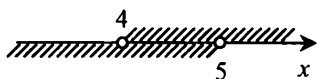
Решить систему – значит, найти все её решения или доказать, что решений нет.

2-й этап.

Теперь перед учащимися возникает новая проблема: как решить полученную систему неравенств. Мы умеем решать отдельно неравенство, тогда получим:

$$\begin{cases} 4(x+1) > 20, \\ 5(x-1) < 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ x < 5. \end{cases}$$

Получили, что множество решений первого неравенства есть открытый числовой луч  $(4; +\infty)$ , а второго –  $(-\infty; 5)$ . Пересечение этих двух числовых промежутков и будет являться решением системы неравенств:



$$(-\infty; 5) \cap (4; +\infty) = (4; 5).$$

Решение можно записать как в виде числового промежутка, так и соответствующего ему неравенства:  $4 < x < 5$ .

3-й этап.

Рассмотрим примеры 1–4 на с. 185–187 учебника. Это поможет увидеть различные варианты получаемых решений: интервалы, числовые лучи, пустое множество.

Таким образом, учащиеся наметили несложный алгоритм решения системы неравенств с одной переменной:

1-й шаг. Решаем каждое неравенство системы отдельно.

2-й шаг. Находим пересечение числовых промежутков, являющихся решением неравенств системы, с помощью координатной прямой.

3-й шаг. Записываем полученное решение в виде числового промежутка или неравенства.


## V. Формирование умений и навыков.


Задания, которые учащиеся должны выполнить на уроке, можно разделить на две группы:


1) задания на отработку новых терминов и символики, а также на геометрическую интерпретацию решения систем неравенств: № 874, 875 (устно);

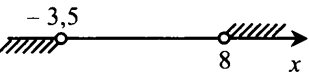
2) задания на решение несложных систем неравенств: № 876, 877 (б, г), 879 (б, г), 879 (б, г).


**№ 876.**


а)  $\begin{cases} x > 17, \\ x > 12. \end{cases}$    $(17; +\infty); x > 17.$

б)  $\begin{cases} x < 1, \\ x < 5. \end{cases}$    $(-\infty; 1); x < 1.$

в)  $\begin{cases} x > 0, \\ x < 6. \end{cases}$    $(0; 6); 0 < x < 6.$


г)  $\begin{cases} x < -3,5, \\ x > 8. \end{cases}$    $\emptyset; \text{нет решений.}$

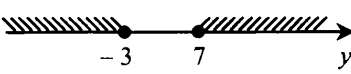
д)  $\begin{cases} x \geq -1, \\ x \leq 3. \end{cases}$    $[-1; 3]; -1 \leq x \leq 3.$

е)  $\begin{cases} x > 8, \\ x \leq 20. \end{cases}$    $(8; 20]; 8 < x \leq 20.$

Ответ: а)  $(17; +\infty)$ ; б)  $(-\infty; 1)$ ; в)  $(0; 6)$ ; г) нет решений; д)  $[-1; 3]$ ; е)  $(8; 20]$ .

**№ 877.**

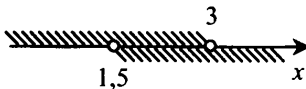
б)  $\begin{cases} 4y < -4, \\ 5 - y > 0; \end{cases}$   $\begin{cases} y < -1, \\ -y > -5; \end{cases}$   $\begin{cases} y < -1, \\ y < 5. \end{cases}$    $(-\infty; -1); y < -1.$

г)  $\begin{cases} 6y \geq 42, \\ 4y + 12 \leq 0; \end{cases}$   $\begin{cases} y \geq 7, \\ 4y \leq -12; \end{cases}$   $\begin{cases} y \geq 7, \\ y \leq -3. \end{cases}$    $\emptyset; \text{нет решений.}$

Ответ: б)  $(-\infty; -1)$ ; г) нет решений.

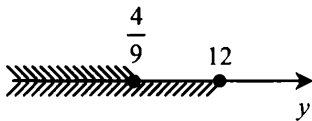
№ 879.

$$\text{б) } \begin{cases} 0,7x - 2,1 < 0, \\ \frac{2}{3}x > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 0,7x < 2,1, \\ 2x > 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 3, \\ x > 1,5. \end{cases}$$



$(1,5; 3)$ .

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{5}{6}x - 10 \leq 0, \\ 3x \leq 1\frac{1}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - 60 \leq 0, \\ x \leq \frac{4}{3} : 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x \leq 60, \\ x \leq \frac{4}{9}; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 12, \\ x \leq \frac{4}{9}. \end{cases}$$



$\left(-\infty; \frac{4}{9}\right]$ .

Ответ: б)  $(1,5; 3)$ ; г)  $\left(-\infty; \frac{4}{9}\right]$ .

## VI. Итоги урока.

– Что называется решением системы неравенств?

– Является ли решением системы неравенств

$$\begin{cases} 2x + 1 > 3, \\ 3x < 10 \end{cases} \quad \text{число 3? Число 5?}$$

– Что значит решить систему неравенств?

Домашнее задание: № 877 (а, в), 878, 879 (а, в), 880.

## Урок 82

### РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

**Цель:** продолжить формировать умение решать системы неравенств с одной переменной путем равносильных преобразований неравенств.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

## II. Устная работа.

1. Является ли число 6 решением системы неравенств:

а)  $\begin{cases} x > 3, \\ 2x < 15; \end{cases}$       б)  $\begin{cases} x - 3 < 2, \\ 5 > \frac{1}{2}x. \end{cases} ?$

2. Решите систему неравенств:

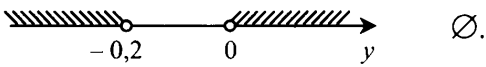
а)  $\begin{cases} x \geq 2, \\ x > 4; \end{cases}$       в)  $\begin{cases} x > 5, \\ x \leq 0; \end{cases}$       д)  $\begin{cases} x > 0, \\ x \leq 0; \end{cases}$       ж)  $\begin{cases} x^2 \geq 0, \\ x > 3; \end{cases}$   
б)  $\begin{cases} x < 3, \\ x \leq -2; \end{cases}$       г)  $\begin{cases} x \geq 8, \\ x \leq 8. \end{cases}$       е)  $\begin{cases} x > 0, \\ x < 6. \end{cases}$       з)  $\begin{cases} (x-1)^2 < 0, \\ x \geq 16. \end{cases}$

## III. Формирование умений и навыков.

На этом уроке учащимся предлагаются для решения более сложные системы неравенств. Кроме того, задания сформулированы таким образом, что требуется не только найти решение системы, но и проверить выполнение каких-либо дополнительных условий.


**№ 822 (б, г).**

б)  $\begin{cases} 1 - 12y < 3y + 1, & -12y - 3y < 1 - 1, & -15y < 0, \\ 2 - 6y > 4 + 4y; & -6y - 4y > 4 - 2; & -10y > 2; \\ y > 0, & & \\ y < -0,2. & & \end{cases}$



$\emptyset.$

г)  $\begin{cases} 6 + 6,2x \geq 12 - 1,8x, & 6,2x + 1,8x \geq 12 - 6, & 8x \geq 6, \\ 2 - x \geq 3,5 - 2x; & -x + 2x \geq 3,5 - 2; & x \geq 1,5; \\ x \geq 0,75, & & \\ x \geq 1,5. & & \end{cases}$



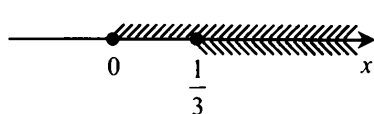
$[1,5; +\infty).$

Ответ: б) нет решений; г)  $[1,5; +\infty).$

**№ 883 (б, г).**

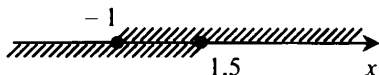
Допустимы те значения переменной, при которых подкоренные выражения неотрицательны:

$$б) \begin{cases} x \geq 0, \\ 3x - 1 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ 3x \geq 1; \end{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq \frac{1}{3}. \end{cases}$$



$$\left[ \frac{1}{3}; +\infty \right).$$

$$г) \begin{cases} 2x + 2 \geq 0, \\ 6 - 4x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} 2x \geq -2, \\ -4x \geq -6; \end{cases} \begin{cases} x \geq -1, \\ x \leq 1,5. \end{cases}$$



$$[-1; 1,5].$$

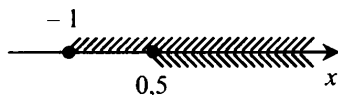
Ответ: б)  $\left[ \frac{1}{3}; +\infty \right)$ ; г)  $[-1; 1,5]$ .

### № 884 (б).

б) В область определения функции  $y = \frac{6}{\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+1}}$  вхо-

дят те значения  $x$ , для которых подкоренные выражения неотрицательны и знаменатель дроби не обращается в нуль.

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0, \\ x + 1 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} 2x \geq 1, \\ x \geq -1; \end{cases} \begin{cases} x \geq 0,5, \\ x \geq -1. \end{cases}$$



Знаменатель равен нулю, если

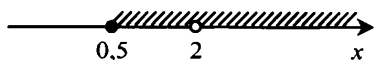
$$\sqrt{2x-1} = \sqrt{x+1},$$

$$2x - 1 = x + 1,$$

$$2x - x = 1 + 1,$$

$$x = 2.$$

Значит, из области определения функции необходимо исключить  $x = 2$ .



$$[0,5; 2) \cup (2; +\infty).$$

Ответ:  $[0,5; 2) \cup (2; +\infty)$ .

### № 886 (б, г).

$$б) \begin{cases} 3,3 - 3(1,2 - 5x) > 0,6(10x + 1), \\ 1,6 - 4,5(4x - 1) < 2x + 26,1; \end{cases} \begin{cases} 3,3 - 3,6 + 15x > 6x + 0,6, \\ 1,6 - 18x + 4,5 < 2x + 26,1; \end{cases}$$

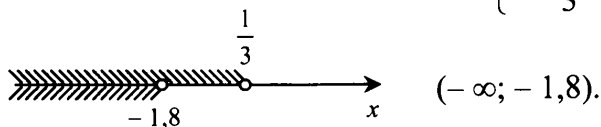


$$\begin{cases} 15x - 6x > 0,6 - 3,3 + 3,6, \\ -18x - 2x < 26,1 - 1,6 - 4,5; \end{cases} \quad \begin{cases} 9x > 0,9, \\ -20x < 20; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0,1, \\ x > -1. \end{cases}$$



$$\Gamma) \begin{cases} x(x-1) - (x^2 - 10) < 1 - 6x, \\ 3,5 - (x-1,5) < 6 - 4x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - x - x^2 + 10 < 1 - 6x, \\ 3,5 - x + 1,5 < 6 - 4x; \end{cases}$$

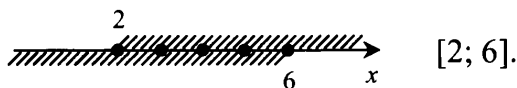
$$\begin{cases} -x + 6x < 1 - 10, \\ -x + 4x < 6 - 3,5 - 1,5; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x < -9, \\ 3x < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1,8, \\ x < \frac{1}{3}. \end{cases}$$



Ответ: б)  $(0,1; +\infty)$ ; г)  $(-\infty; -1,8)$ .

**№ 887 (б, г).**

$$\text{б) } \begin{cases} 12 - 6x \leq 0, \\ 3x + 1 \leq 25 - x; \end{cases} \quad \begin{cases} -6x \leq -12, \\ 3x + x \leq 25 - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ 4x \leq 24; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq 6. \end{cases}$$



Целыми решениями являются: 2; 3; 4; 5; 6.

$$\Gamma) \begin{cases} 3 - 4x < 15, \\ 1 - 2x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -4x < 12, \\ -2x > -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -3, \\ x < 0,5. \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \\ 0,5 \end{cases}$$

Целыми решениями являются:  $-2; -1; 0$ .

Ответ: б) 2; 3; 4; 5; 6; г)  $-2; -1; 0$ .

#### IV. Проверочная работа.

##### Вариант 1

Решите систему неравенств:

$$1. \begin{cases} 0,5x < 2, \\ -3x \geq -9. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 6x + 2 > 9 - x, \\ x + 8,3 < 11. \end{cases}$$

## Вариант 2

Решите систему неравенств:

$$1. \begin{cases} 0,2x > 2, \\ -3x < -1,2. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 7x + 2 > 6x - 1, \\ x + 1,6 > 2. \end{cases}$$

### V. Итоги урока.

- Что называется решением системы неравенств?
- Что значит решить систему неравенств?
- Каков алгоритм решения системы неравенств?
- Сколько решений может иметь система неравенств?

**Домашнее задание:** № 881, 883 (а, в), 885, 886 (а, в), 888.

## Урок 83

### РЕШЕНИЕ ДВОЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

**Цели:** рассмотреть решение двойного неравенства через систему неравенств; продолжить формирование умения решать системы двух и более неравенств.

### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

1. Решите систему неравенств:

$$а) \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x > \frac{1}{10}; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} y \leq 4, \\ y > -3; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x > 5, \\ x \leq -1; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} y < -2, \\ y < -7. \end{cases}$$

2. Известно, что  $2 < x < 5$ . Оцените значение выражения:

а)  $2x$ ;

б)  $-x$ ;

в)  $x - 3$ ;

г)  $3x - 1$ .

#### III. Объяснение нового материала.

1. На с. 187 рассмотреть пример 5.

Необходимо, чтобы учащиеся уяснили, что двойное неравенство представляет собой иную запись системы неравенств:

$$-1 < 3 + 2x < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2x < 3, \\ 3 + 2x > -1. \end{cases}$$

Решая систему, получим  $\begin{cases} x < 0, \\ x > -2. \end{cases}$  Полученное решение

можно записать как в виде числового промежутка  $(-2; 0)$ , так и в виде двойного неравенства  $-2 < x < 0$ .

2. Двойное неравенство можно решать и другим способом, используя теоремы-свойства числовых неравенств:

$-1 < 3 + 2x < 3$ . Прибавляем к каждой части неравенства  $-3$ , получим:

$$-1 - 3 < 3 + 2x - 3 < 3 - 3$$

$-4 < 2x < 0$ . Разделим каждую часть неравенства на 2, получим:

$$-4 : 2 < 2x : 2 < 0 : 2$$

$$-2 < x < 0.$$

#### IV. Формирование умений и навыков.

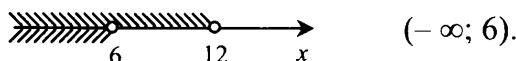
Все задания, решаемые на этом уроке, можно разбить на 4 группы:

1. Решение систем неравенств, содержащих дроби.
2. Решение двойных неравенств.
3. Решение систем трёх (и более) неравенств.
4. Решение заданий повышенной трудности.

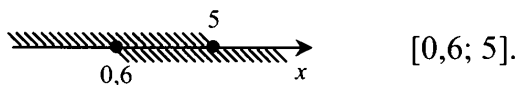
1-я группа. № 890 (а, в), 891 (б, г).

#### № 890.

$$а) \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{x}{4} < 7, \\ 1 - \frac{x}{6} > 0; \end{cases} \cdot 12 \quad \begin{cases} 4x + 3x < 7 \cdot 12, \\ 6 - x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x < 84, \\ -x > -6; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 12, \\ x < 6. \end{cases}$$



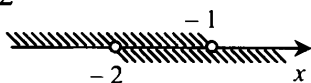
$$в) \begin{cases} \frac{3x-1}{2} - x \leq 2, \\ 2x - \frac{x}{3} \geq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-1-2x \leq 4, \\ 6x-x \geq 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 5, \\ 5x \geq 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 5, \\ x \geq 0,6. \end{cases}$$



Ответ: а)  $(-\infty; 6)$ ; в)  $[0,6; 5]$ .

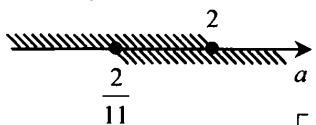
№ 891.

$$б) \begin{cases} \frac{3x+1}{2} < -1, \\ \frac{x}{2} - 1 < 1; \end{cases} \begin{cases} 3x+1 < -2, \\ x-2 < 2x; \end{cases} \begin{cases} 3x < -3, \\ -x < 2; \end{cases} \begin{cases} x < -1, \\ x > -2. \end{cases}$$



$$(-2; -1).$$

$$г) \begin{cases} \frac{5a+8}{3} - a \geq 2a, \\ 1 - \frac{6-15a}{4} \geq a; \end{cases} \begin{cases} 5a+8-3a \geq 6a, \\ 4-6+15a \geq 4a; \end{cases} \begin{cases} -4a \geq -8, \\ 11a \geq 2; \end{cases} \begin{cases} a \leq 2, \\ a \geq \frac{2}{11}. \end{cases}$$



$$\left[ \frac{2}{11}; 2 \right].$$

Ответ: б)  $(-2; -1)$ ; г)  $\left[ \frac{2}{11}; 2 \right]$ .

2-я группа. № 893(б; г), 894 (а; в), 895 (а).

№ 893.

$$б) -1 < \frac{4-a}{3} \leq 5, \quad / \cdot 3$$

$$-3 < 4 - a \leq 15,$$

$$-3 - 4 < -a \leq 15 - 4,$$

$$-7 < -a \leq 11, \quad / : (-1)$$

$$-11 \leq a < 7; \quad [-11; 7).$$

$$г) -2,5 \leq \frac{1-3y}{2} \leq 1,5 \quad / \cdot 2$$

$$-5 \leq 1 - 3y \leq 3,$$

$$-5 - 1 \leq -3y \leq 3 - 1,$$

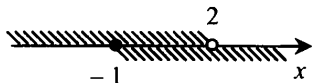
$$-6 \leq -3y \leq 2, \quad / : (-3)$$

$$-\frac{2}{3} \leq y \leq 2; \quad \left[ -\frac{2}{3}; 2 \right].$$

Ответ: б)  $[-11; 7)$ ; г)  $\left[ -\frac{2}{3}; 2 \right]$ .

№ 894.

$$а) -1 \leq 15a + 14 < 44 \Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 14 < 44, \\ 15x + 14 \geq -1; \end{cases} \begin{cases} 15x < 30, \\ 15x \geq -15; \end{cases} \begin{cases} x < 2, \\ x \geq -1. \end{cases}$$



$$[-1; 2).$$

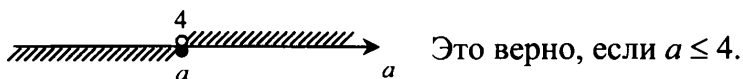
$$в) -1,2 < 1 - 2y < 2,4 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2y < 2,4, \\ 1 - 2y > -1,2; \end{cases} \begin{cases} -2y < 1,4, \\ -2y > -2,2; \end{cases}$$



## Решение

$$\begin{cases} 3x > 12, \\ x < a; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ x < a. \end{cases} \quad \text{Чтобы система не имела решений, необходимо, чтобы } (4; +\infty) \cap (-\infty; a) = \emptyset.$$

дим, чтобы  $(4; +\infty) \cap (-\infty; a) = \emptyset$ .



Ответ: При  $a \leq 4$ .

### № 896.

$x^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0$  – квадратное уравнение.

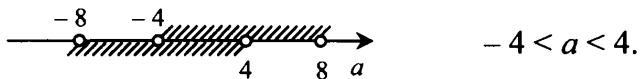
$D_1 = a^2 - (a^2 - 4) = 4$ ,  $D_1 > 0$ , значит, уравнение имеет два различных корня. Найдём их:

$$x_1 = -a + \sqrt{D_1} = -a + 2 = 2 - a;$$

$$x_2 = -a - \sqrt{D_1} = -a - 2.$$

Так как оба корня должны принадлежать интервалу  $(-6; 6)$ , то одновременно выполняются условия:

$$\begin{cases} -6 < 2 - a < 6; \\ -6 < -a - 2 < 6; \end{cases} \quad \begin{cases} -8 < -a < 4, \\ -4 < -a < 8; \end{cases} \quad \begin{cases} -4 < a < 8, \\ -8 < a < 4. \end{cases}$$



Ответ: при  $-4 < a < 4$ .

## V. Итоги урока.

- Что называется решением системы неравенств?
- Каков алгоритм решения системы неравенств?
- Какими способами можно решить двойное неравенство?
- В чём суть решения системы, содержащей три и более неравенств?

**Домашнее задание:** № 891 (а), 895 (б), 900 (а), 889. Повторить п. 32–35 (подготовка к контрольной работе).

## Урок 84

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 8

#### Вариант 1

1. Решите неравенство:

а)  $\frac{1}{6}x < 5$ ;      б)  $1 - 3x \leq 0$ ;      в)  $5(y - 1,2) - 4,6 > 3y + 1$ .

2. При каких значениях  $a$  значение дроби  $\frac{7+a}{3}$  меньше соответствующего значения дроби  $\frac{12-a}{2}$ ?

3. Решите систему неравенств:

а)  $\begin{cases} 2x - 3 > 0, \\ 7x + 4 > 0; \end{cases}$       б)  $\begin{cases} 3 - 2x < 1, \\ 1,6 + x < 2,9. \end{cases}$

4. Найдите целые решения системы неравенств

$$\begin{cases} 6 - 2x < 3(x - 1), \\ 6 - \frac{x}{2} \geq x. \end{cases}$$

5. При каких значениях  $x$  имеет смысл выражение

$$\sqrt{3x - 2} + \sqrt{6 - x}?$$

6. При каких значениях  $a$  множеством решений неравенства  $3x - 7 < \frac{a}{3}$  является числовой промежуток  $(-\infty; 4)$ ?

#### Вариант 2

1. Решите неравенство:

а)  $\frac{1}{3}x \geq 2$ ;      б)  $2 - 7x > 0$ ;      в)  $6(y - 1,5) - 3,4 > 4y - 2,4$ .

2. При каких значениях  $b$  значение дроби  $\frac{b+4}{2}$  больше соответствующего значения дроби  $\frac{5-2b}{3}$ ?

3. Решите систему неравенств:

а)  $\begin{cases} 4x - 10 > 10, \\ 3x - 5 > 1; \end{cases}$       б)  $\begin{cases} 1,4 + x > 1,5, \\ 5 - 2x > 2. \end{cases}$

4. Найдите целые решения системы неравенств

$$\begin{cases} 10 - 4x \geq 3(1 - x), \\ 3,5 + \frac{x}{4} < 2x. \end{cases}$$

5. При каких значениях  $a$  имеет смысл выражение

$$\sqrt{5a-1} + \sqrt{a+8} ?$$

6. При каких значениях  $b$  множеством решений неравенства  $4x + 6 > \frac{b}{5}$  является числовой промежуток  $(3; +\infty)$ ?

### Вариант 3

1. Решите неравенство:

а)  $\frac{1}{4}x > 1$ ;      б)  $1 - 6x \geq 0$ ;      в)  $5(y - 1,4) - 6 < 4y - 1,5$ .

2. При каких значениях  $m$  значение дроби  $\frac{m+1}{3}$  меньше соответствующего значения выражения  $m - 6$ ?

3. Решите систему неравенств:

а)  $\begin{cases} 3x - 9 < 0, \\ 5x + 2 > 0; \end{cases}$       б)  $\begin{cases} 15 - x < 14, \\ 4 - 2x < 5. \end{cases}$

4. Найдите целые решения системы неравенств

$$\begin{cases} 5(1 - 2x) < 2x - 4, \\ 2,5 + \frac{x}{2} \geq x. \end{cases}$$

5. При каких значениях  $a$  имеет смысл выражение

$$\sqrt{12-3a} + \sqrt{a+2} ?$$

6. При каких значениях  $a$  множеством решений неравенства  $5x - 1 < \frac{a}{4}$  является числовой промежуток  $(-\infty; 2)$ ?

### Вариант 4

1. Решите неравенство:

а)  $\frac{1}{8}x \leq 2$ ;      б)  $2 - 5x < 0$ ;      в)  $3(x - 1,5) - 4 < 4x + 1,5$ .

2. При каких значениях  $a$  значение выражения  $a + 6$  меньше соответствующего значения дроби  $\frac{a+2}{4}$ ?



3. Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} 6x - 12 > 0, \\ 2x - 3 > 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 26 - x < 25, \\ 2x + 7 < 13. \end{cases}$$

4. Найдите целые решения системы неравенств

$$\begin{cases} 1 - 5x < 4(1 - x), \\ 3,5 + \frac{x}{4} \geq 2x. \end{cases}$$

5. При каких значениях  $m$  имеет смысл выражение

$$\sqrt{15 - 5m} + \sqrt{4 + m} ?$$

6. При каких значениях  $b$  множеством решений неравенства

$$6x + 11 > \frac{b}{4} \text{ является числовой промежуток } (1; +\infty)?$$

Рекомендации по оцениванию.

Задания 1 и 3 соответствуют уровню обязательной подготовки. Для получения отметки «3» достаточно решить любые 2 задания. Для получения оценки «5» необходимо решить любые 5 заданий.

## РЕШЕНИЕ ВАРИАНТОВ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

### Вариант 1

$$\begin{array}{ll} \text{1. а) } \frac{1}{6}x < 5; & / \cdot 6 \\ x < 30; & (-\infty; 30). \\ \text{б) } 1 - 3x \leq 0; & \\ -3x \leq 1; & / : (-3) \\ x \geq \frac{1}{3}; & \left[ \frac{1}{3}; +\infty \right). \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{в) } 5(y - 1,2) - 4,6 > 3y + 1, \\ 5y - 6 - 4,6 > 3y + 1, \\ 5y - 3y > 1 + 6 + 4,6, \\ 2y > 11,6, & / : 2 \\ y > 5,8; & (5,8; +\infty). \end{array}$$

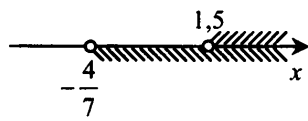
Ответ: а)  $(-\infty; 30)$ ; б)  $\left[ \frac{1}{3}; +\infty \right)$ ; в)  $(5,8; +\infty)$ .

$$\begin{array}{l} \text{2. } \frac{7+a}{3} < \frac{12-a}{2}, \quad / \cdot 6 \\ 2(7+a) < 3(12-a), \\ 14 + 2a < 36 - 3a, \\ 2a + 3a < 36 - 14, \end{array}$$

$$\begin{aligned} 5a < 22, \\ a < 4,4. \end{aligned} \quad / : 5$$

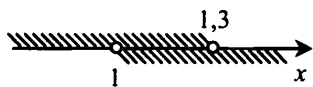
Ответ: при  $a < 4,4$ .

$$3. \text{ а) } \begin{cases} 2x - 3 > 0, \\ 7x + 4 > 0; \end{cases} \begin{cases} 2x > 3, \\ 7x > -4; \end{cases} \begin{cases} x > 1,5, \\ x > -\frac{4}{7}; \end{cases}$$



$(1,5; +\infty)$ .

$$6) \begin{cases} 3 - 2x < 1, \\ 1,6 + x < 2,9; \end{cases} \begin{cases} -2x < -2, \\ x < 1,3; \end{cases} \begin{cases} x > 1, \\ x < 1,3; \end{cases}$$

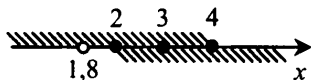


$(1; 1,3)$ .

Ответ: а)  $(1,5; +\infty)$ ; б)  $(1; 1,3)$ .

$$4. \begin{cases} 6 - 2x < 3(x - 1), \\ 6 - \frac{x}{2} \geq x. \end{cases} \begin{cases} 6 - 2x < 3x - 3, \\ 12 - x \geq 2x; \end{cases} \begin{cases} -2x - 3x < -3 - 6, \\ -x - 2x \geq -12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x < -9, \\ -3x \geq -12; \end{cases} \begin{cases} x > 1,8, \\ x \leq 4; \end{cases}$$

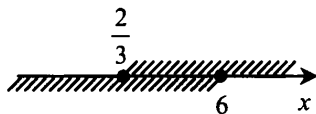


Ответ: 2; 3; 4.

5. Выражение имеет смысл при  $x$ , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 0, \\ 6 - x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} 3x \geq 2, \\ -x \geq -6; \end{cases} \begin{cases} x \geq \frac{2}{3}, \\ x \leq 6; \end{cases}$$

$$\frac{2}{3} \leq x \leq 6.$$



Ответ: при  $\frac{2}{3} \leq x \leq 6$ .

$$6. 3x - 7 < \frac{a}{3},$$

$$9x - 21 < a,$$

$$9x < a + 21,$$

$$x < \frac{a}{9} + \frac{7}{3};$$

$$\left(-\infty; \frac{a}{9} + \frac{7}{3}\right).$$

Множеством решений является числовой промежуток  $(-\infty; 4)$ ,

если  $\frac{a}{9} + \frac{7}{3} = 4$ ;  $\quad / \cdot 9$

$$a + 21 = 36,$$

$$a = 15.$$

Ответ: при  $a = 15$ .

### Вариант 2

1. а)  $\frac{1}{3}x \geq 2$ ;  $\quad / \cdot 3$

$$x \geq 6; \quad [6; +\infty).$$

б)  $2 - 7x > 0$ ;

$$-7x > -2, \quad / : (-7)$$

$$x < \frac{2}{7}; \quad \left(-\infty; \frac{2}{7}\right).$$

в)  $6(y - 1,5) - 3,4 > 4y - 2,4$ ,

$$6y - 9 - 3,4 > 4y - 2,4,$$

$$6y - 4y > 9 + 3,4 - 2,4,$$

$$2y > 10, \quad / : 2,$$

$$y > 5; \quad (5; +\infty).$$

Ответ: а)  $[6; +\infty)$ ; б)  $\left(-\infty; \frac{2}{7}\right)$ ; в)  $(5; +\infty)$ .

2.  $\frac{b+4}{2} > \frac{5-2b}{3}$ ;  $\quad / \cdot 6$

$$3(b+4) > 2(5-2b),$$

$$3b + 12 > 10 - 4b,$$

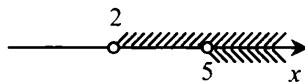
$$3b + 4b > 10 - 12,$$

$$7b > -2,$$

$$b > -\frac{2}{7}.$$

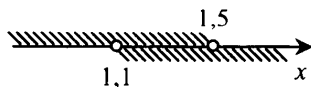
Ответ: при  $b > -\frac{2}{7}$ .

3. а)  $\begin{cases} 4x - 10 > 10, \\ 3x - 5 > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x > 20, \\ 3x > 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 5, \\ x > 2; \end{cases}$



$(5; +\infty)$ .

б)  $\begin{cases} 1,4 + x > 1,5, \\ 5 - 2x > 2. \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1,1, \\ -2x > -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1,1, \\ x < 1,5; \end{cases}$



$(1,1; 1,5)$ .

Ответ: а)  $(5; +\infty)$ ; б)  $(1,1; 1,5)$ .

$$4. \begin{cases} 10 - 4x \geq 3(1 - x), \\ 3,5 + \frac{x}{4} < 2x. \end{cases} \begin{cases} 10 - 4x \geq 3 - 3x, \\ 14 + x < 8x; \end{cases} \begin{cases} -4x + 3x \geq 3 - 10, \\ x - 8x < -14; \end{cases}$$

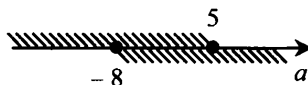
$$\begin{cases} -x \geq -7, \\ -7x < -14; \end{cases} \begin{cases} x \leq 7, \\ x > 2; \end{cases}$$



Ответ: 3; 4; 5; 6; 7.

5. Выражение имеет смысл при  $x$ , удовлетворяющих системе:

$$\begin{cases} 5 - a \geq 0, \\ a + 8 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} -a \geq -5, \\ a \geq -8; \end{cases} \begin{cases} a \leq 5, \\ a \geq -8; \end{cases}$$



$$-8 \leq a \leq 5.$$

Ответ: при  $-8 \leq a \leq 5$ .

$$6. 4x + 6 > \frac{b}{5},$$

$$20x + 30 > b,$$

$$20x > b - 30,$$

$$x > \frac{b - 30}{20}; \quad \left( \frac{b - 30}{20}; +\infty \right).$$

Множеством решений является числовой промежуток  $(3; +\infty)$ ,

если  $\frac{b - 30}{20} = 3,$

$$b - 30 = 60,$$

$$b = 90.$$

Ответ: при  $b = 90$ .

### Вариант 3

$$1. \text{ а) } \frac{1}{4}x > 1; \quad / \cdot 4$$

$$x > 4; \quad (4; +\infty).$$

$$\text{ б) } 1 - 6x \geq 0;$$

$$-6x \geq -1; \quad / : (-6)$$

$$x \leq \frac{1}{6}; \quad \left( -\infty; \frac{1}{6} \right].$$

$$\text{ в) } 5(y - 1,4) - 6 < 4y - 1,5,$$

$$5y - 7 - 6 < 4y - 1,5,$$

$$5y - 4y < 7 + 6 - 1,5,$$

$$y < 11,5; \quad (-\infty; 11,5).$$

Ответ: а)  $(4; +\infty)$ ; б)  $\left( -\infty; \frac{1}{6} \right]$ ; в)  $(-\infty; 11,5)$ .

$$2. \frac{m+1}{3} < m-6; \quad / \cdot 3$$

$$m+1 < 3(m-6),$$

$$m+1 < 3m-18,$$

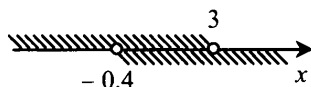
$$m-3m < -1-18,$$

$$-2m < -19; \quad / : (-2)$$

$$m > 9,5.$$

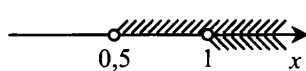
Ответ: при  $m > 9,5$

$$3. \text{ а) } \begin{cases} 3x-9 < 0, \\ 5x+2 > 0; \end{cases} \begin{cases} 3x < 9, \\ 5x > -2; \end{cases} \begin{cases} x < 4, \\ x > -0,4 \end{cases}$$



$(-0,4; 3).$

$$\text{ б) } \begin{cases} 15-x < 14, \\ 4-2x < 5; \end{cases} \begin{cases} -x < -1, \\ -2x < 1; \end{cases} \begin{cases} x > 1, \\ x > 0,5; \end{cases}$$

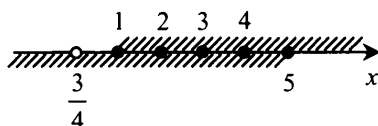


$(1; +\infty).$

Ответ: а)  $(-0,4; 3)$ ; б)  $(1; +\infty)$ .

$$4. \begin{cases} 5(1-2x) < 2x-4, \\ 2,5 + \frac{x}{2} \geq x; \end{cases} \begin{cases} 5-10x < 2x-4, \\ 5+x \geq 2x; \end{cases} \begin{cases} -10x-2x < -4-5, \\ x-2x \geq -5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12x < -9, \\ -x \geq -5; \end{cases} \begin{cases} x > \frac{3}{4}, \\ x \leq 5; \end{cases}$$



Ответ: 1; 2; 3; 4; 5.

5. Выражение имеет смысл при  $a$ , удовлетворяющих системе:

$$\begin{cases} 12-3a \geq 0, \\ a+2 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} -3a \geq -12, \\ a \geq -2; \end{cases} \begin{cases} a \leq 4, \\ a \geq -2; \end{cases}$$



$$-2 \leq a \leq 4.$$

Ответ: при  $-2 \leq a \leq 4$ .

$$6. 5x-1 < \frac{a}{4},$$

$$20x-4 < a,$$

$$20x < a+4,$$

$$x < \frac{a}{20} + \frac{1}{5}; \quad \left(-\infty; \frac{a}{20} + \frac{1}{5}\right).$$

Множеством решений является числовой промежуток  $(-\infty; 2)$ ,

если  $\frac{a}{20} + \frac{1}{5} = 2,$

$$a + 4 = 40,$$

$$a = 36.$$

Ответ: при  $a = 36$ .

### Вариант 4

1. а)  $\frac{1}{8}x \leq 2; \quad / \cdot 8$

$$x \leq 16; \quad (-\infty; 16].$$

б)  $2 - 5x < 0;$

$$-5x < -2; \quad / : (-5)$$

$$x > 0,4 \quad (0,4; +\infty).$$

в)  $3(x - 1,5) - 4 < 4x + 1,5,$

$$3x - 4,5 - 4 < 4x + 1,5,$$

$$3x - 4x < 4,5 + 4 + 1,5,$$

$$-x < 10,$$

$$x > -10; \quad (-10; +\infty).$$

Ответ: а)  $(-\infty; 16]$ ; б)  $(0,4; +\infty)$ ; в)  $(-10; +\infty)$ .

2.  $a + 6 < \frac{a+2}{4}; \quad / \cdot 4$

$$4(a + 6) < a + 2,$$

$$4a + 24 < a + 2,$$

$$4a - a < 2 - 24,$$

$$3a < -22,$$

$$a < -7\frac{1}{3}.$$

Ответ: при  $a < -7\frac{1}{3}$ .

3. а)  $\begin{cases} 6x - 12 > 0, \\ 2x - 3 > 0; \end{cases} \begin{cases} 6x > 12, \\ 2x > 3; \end{cases} \begin{cases} x > 2, \\ x > 1,5; \end{cases}$



$(2; +\infty)$ .

б)  $\begin{cases} 26 - x < 25, \\ 2x + 7 < 13; \end{cases} \begin{cases} -x < -1, \\ 2x < 6; \end{cases} \begin{cases} x > 1, \\ x < 3; \end{cases}$

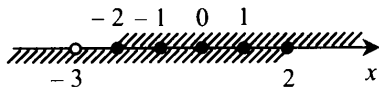


$(1; 3)$ .

Ответ: а)  $(2; +\infty)$ ; б)  $(1; 3)$ .

$$4. \begin{cases} 1-5x < 4(1-x), \\ 3,5 + \frac{x}{4} \geq 2x; \end{cases} \begin{cases} 1-5x < 4-4x, \\ 14+x \geq 8x; \end{cases} \begin{cases} -5x+4x < 4-1, \\ x-8x \geq -14; \end{cases}$$

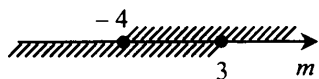
$$\begin{cases} -x < 3, \\ -7x \geq -14; \end{cases} \begin{cases} x > -3, \\ x \leq 2; \end{cases}$$



Ответ:  $-2; -1; 0; 1; 2$ .

5. Выражение имеет смысл при  $m$ , удовлетворяющих системе:

$$\begin{cases} 15-5m \geq 0, \\ 4+m \geq 0; \end{cases} \begin{cases} -5m \geq -15, \\ m \geq -4; \end{cases} \begin{cases} m \leq 3, \\ m \geq -4; \end{cases}$$



$$-4 \leq m < 3.$$

Ответ: при  $-4 \leq m < 3$ .

$$6. 6x+11 > \frac{b}{4},$$

$$24x+44 > b,$$

$$24x > b-44,$$

$$x > \frac{b-44}{24}; \quad \left( \frac{b-44}{24}; +\infty \right).$$

Множеством решений является числовой промежуток  $(1; +\infty)$ ,

если  $\frac{b-44}{24} = 1,$

$$b-44 = 24,$$

$$b = 68.$$

Ответ: при  $b = 68$ .

## Урок 85

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

**Цели:** изучить основные приёмы доказательства неравенств; сформировать умение доказывать сложные неравенства различными приёмами.

#### Ход урока

##### I. Актуализация знаний.

1. Сформулировать определение: число  $a$  больше числа  $b$ , если разность  $a - b$  — положительное число; число  $a$  меньше числа  $b$ , если разность  $a - b$  — отрицательное число.

2. Сформулировать основные свойства числовых неравенств:

**Теорема 1.** Если  $a > b$ , то  $b < a$ ; если  $a < b$ , то  $b > a$ .

**Теорема 2.** Если  $a < b$  и  $b < c$ , то  $a < c$ .

**Теорема 3.** Если  $a < b$  и  $c$  – любое число, то  $a + c < b + c$ .

**Теорема 4.** Если  $a < b$  и  $c > 0$ , то  $ac < bc$ ;

Если  $a < b$  и  $c < 0$ , то  $ac > bc$ .

**С л е д с т в и е.** Если  $a > 0$  и  $b > 0$  и  $a < b$ , то  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ .

3. Сформулировать правила почленного сложения и умножения числовых неравенств.

**Теорема 5.** Если  $a < b$  и  $c < d$ , то  $a + c < b + d$ .

**Теорема 6.** Если  $a < b$  и  $c < d$ , где  $a, b, c, d$  – положительные числа, то  $ac < bd$ .

**С л е д с т в и е.** Если  $a > 0, b > 0$  и  $a < b$ , то  $a^n < b^n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ .

## II. Изучение нового материала.

1. Сначала показываем отличие заданий «решить неравенство» и «доказать неравенство». В первом случае мы выполняем равносильные преобразования исходного неравенства, получаем более простое неравенство и находим те значения переменной, которые обращают неравенство в верное числовое неравенство (или доказываем, что таких значений нет).

В заданиях на доказательство неравенства в условии есть утверждение, что данное неравенство верно при любых значениях переменной либо при некоторых значениях (задано заранее множество значений переменной), и необходимо это утверждение доказать.

2. Доказательства проводятся с помощью различных приёмов, некоторые из которых знакомы учащимся.

1-й приём. Составляем разность левой и правой частей неравенства и показываем, что она сохраняет знак при любых указанных значениях переменных.

Рассматриваем данный приём на примере 1 со с. 193 учебника.

2-й приём. Показываем, что данное неравенство следует из других неравенств, справедливость которых известна.

К таким неравенствам (их ещё называют «основными» и «базовыми») относятся:



$$a^2 + b^2 \geq 2ab;$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 0;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0;$$

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \text{ и др.}$$

Рассматриваем данный приём на примере 2 со с. 193–194 учебника.

3-й приём. В отдельных случаях можно доказать неравенство, используя некоторые очевидные соотношения.

В качестве таких очевидных соотношений могут быть взяты, например, такие:  $(1+a)^2 > 1+2a$  при любом  $a \neq 0$ ;  $\frac{1}{c+1} < \frac{1}{c}$  при  $c > 0$ ;  $\sqrt{x+2} > \sqrt{x+1}$  при  $x \geq -1$  и т. п.

Рассматриваем данный приём на примерах 3 и 4 со с. 194–195 учебника.

### III. Формирование умений и навыков.

При доказательстве неравенств можно использовать любые предложенные приёмы, следует поощрять осознанный выбор того или иного приёма.

При рассмотрении задач на доказательство неравенств у учащихся может возникнуть представление об оторванности таких задач от потребностей практики. Чтобы этого не произошло, необходимо решать также прикладные задачи на неравенства.

#### № 905 (а).

Составим разность:

$$a^2 + b^2 + 4 - 2(a+b+1) = a^2 + b^2 + 4 - 2a - 2b - 2 = a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 = (a-1)^2 + (b-1)^2$$

$$\text{Имеем: } (a-1)^2 \geq 0$$

$$(b-1)^2 \geq 0$$

---

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0 \text{ для любых } a \text{ и } b,$$

значит,  $a^2 + b^2 \geq 2(a+b+1)$ . Неравенство доказано.

**№ 907 (а).**

Составим разность

$$(a+b)(ab+16) - 16ab = a^2b + 16a + ab^2 + 16b - 16ab =$$

$$= (a^2b - 8ab + 16b) = (ab^2 - 8ab + 16a) = b(a^2 - 8a + 16) +$$

$$+ a(b^2 - 2b + 16) = b(a-4)^2 + a(b-4)^2.$$

$$(a-4)^2 \geq 0, b > 0, \text{ значит, } b(a-4)^2 \geq 0;$$

$$(b-4)^2 \geq 0, a > 0, \text{ значит, } a(b-4)^2 \geq 0;$$

---


$$b(a-4)^2 + a(b-4)^2 \geq 0,$$

значит,  $(a+b)(ab+16) \geq 0$  при  $a > 0, b > 0$ . Неравенство доказано.

**№ 909.**

Доказать, что  $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}$  для любых  $a > 0, b > 0$ .

$$(a+b)^3 \leq 4(a^3+b^3).$$

Составим разность

$$4(a^3+b^3) - (a+b)^3 = 4a^3 + 4b^3 - a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3 =$$

$$= 3a^3 - 3a^2b + 3b^3 - 3ab^2 = 3a^2(a-b) - 3b^2(a-b) = 3(a-b)(a^2-b^2) =$$

$$= 3(a-b)(a-b)(a+b) = 3(a-b)^2(a+b)$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

$$a+b > 0$$

---


$$(a-b)^2(a+b) \geq 0;$$

$3(a-b)^2(a+b) \geq 0$ , значит,  $4(a^3+b^3) \geq (a+b)^3$ , неравенство доказано.

**№ 912.**

Вспользуемся соотношениями.

$$\sqrt{4x+1} \leq \sqrt{4x+1+4x^2} = |2x+1|;$$

$$\sqrt{4y+1} \leq \sqrt{4y+1+4y^2} = |2y+1|;$$

$$\sqrt{4z+1} \leq \sqrt{4z+1+4z^2} = |2z+1|$$

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \leq |2x+1| + |2y+1| + |2z+1|.$$

$$\text{Имеем: } 4x+1 \geq 0; \quad 4x \geq -1; \quad x \geq -\frac{1}{4}; \quad 2x \geq -\frac{1}{2};$$

$$2x + 1 \geq \frac{1}{2} > 0, \text{ значит, } |2x + 1| = 2x + 1.$$

Аналогично докажем, что  $|2y + 1| = 2y + 1$  и  $|2z + 1| = 2z + 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Имеем: } |2x + 1| + |2y + 1| + |2z + 1| &= 2x + 1 + 2y + 1 + 2z + 1 = \\ &= 2(x + y + z) + 3 = 2 + 3 = 5. \end{aligned}$$

Значит,  $\sqrt{4x + 1} + \sqrt{4y + 1} + \sqrt{4z + 1} \leq 5$ , что и требовалось доказать.

### № 914.

Анализ:

$$t_1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2} \quad (\text{ч})$$

$$V = x \text{ км/ч} \quad \Pi \underbrace{\hspace{10em}}_{1} \Gamma$$

$$t_2 \leq t_1 - ?$$

$$t_2 = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x+2} \quad (\text{ч})$$

Пусть  $x$  км/ч – намеченная скорость велосипедиста, обозначим путь за 1, тогда, по расчетам, он должен был затратить  $\frac{2}{x} + \frac{1}{2}$  (ч)

на весь путь, а на самом деле затратил  $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x+2}$  (ч).

Велосипедист успеет к сроку, если

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x+2} \leq \frac{2}{x} + \frac{1}{2}. \text{ Докажем это.}$$

Составим разность:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x} - \frac{1}{2} &= \frac{x(x+2) + x(x-2) - 2(x^2 - 4)}{x(x-2)(x+2)} = \\ &= \frac{x^2 + 2x + x^2 - 2x - 2x^2 + 8}{x(x^2 - 4)} = \frac{8}{x(x^2 - 4)} > 0, \text{ так как } x > 2. \end{aligned}$$

Имеем:  $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x+2} > \frac{2}{x} + \frac{1}{2}$ , значит, велосипедист не успел вернуться к назначенному сроку.

Ответ: не успел.

# Глава V. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

## Урок 86

### ПОНЯТИЕ СТЕПЕНИ С ЦЕЛЫМ ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

**Цели:** ввести понятие степени с целым отрицательным показателем и формировать умение его применять.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Анализ результатов контрольной работы.

Проанализировать ошибки, допущенные учащимися в работе. Вынести на доску решение заданий, вызвавших затруднения у большинства учащихся.

##### III. Устная работа.

Вычислите:

а)  $2^3$ ;      б)  $(-7)^2$ ;      в)  $(-3)^3$ ;      г)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$ ;

д)  $5^3$ ;      е)  $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ ;      ж)  $(-2)^4$ ;      з)  $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$ ;

и)  $6^3$ ;      к)  $\left(-\frac{1}{9}\right)^2$ ;      л)  $(-3)^0$ ;      м)  $2^1$ .

##### IV. Объяснение нового материала.

Объяснение проводить по следующей схеме:

1. Показ необходимости представления больших и малых чисел в обозримом и удобном для практики виде (рассмотрение примеров со с. 203–204 учебника). Можно провести аналогию с введением десятичных дробей, когда для уменьшения единиц в десять раз мы ввели запятую для отделения разрядов десятых, сотых и т. д. В случае со степенями с основанием 10 мы поступили аналогично, введя отрицательный показатель степени для выражений:  $\frac{1}{10^1}$ ;  $\frac{1}{10^2}$  и т. д.

2. Введение понятия степени с целым отрицательным показателем.

Необходимо дать определение степени с целым отрицательным показателем и вынести на доску запись:

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}},$$

где  $a \neq 0$  и  $n$  – целое отрицательное число

Затем привести несколько примеров, показывающих, как вычисляются степени с целым отрицательным числом. При этом обратить внимание на типичную ошибку: у учащихся степень с целым отрицательным показателем может ассоциироваться с отрицательным числом (например,  $2^{-3} = -2^3$ ).

3. Можно вывести следствие, что числа  $a^n$  и  $a^{-n}$  являются взаимно обратными. Для этого привести несколько примеров типа:

$$3^3 = 27; \quad 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}.$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 16.$$

Затем сделать общий вывод:  $a^n \cdot a^{-n} = a^n \cdot \frac{1}{a^n} = 1$ .

4. Напоминаем, что  $a^0 = 1$  для  $a \neq 0$ ; выражение  $0^0$  – не имеет смысла;  $0^n = 0$  для натуральных  $n$ .

**Правило:** выражение  $0^n$  для целых отрицательных  $n$  не имеет смысла.

Примеры:  $12^0 = 1;$   $(-3,5)^0 = 1;$   
 $0^4 = 0;$   $0^1 = 0;$   
 $0^0$  – не имеет смысла;  
 $0^{-3}$  – не имеет смысла.

## V. Формирование умений и навыков.

На этом уроке необходимо начать формировать у учащихся следующие умения:

– преобразовывать выражения в дробь или произведение, используя определение степени с целым отрицательным показателем;

- вычислять степени с целым отрицательным показателем;
- представлять числа в виде степени с целым показателем.

• № 964, 965 (устно), 966, 968 (а, б, в, е, з, к), 970 (в, г, е).

**№ 966.**

$$\text{а) } 8 = 2^3; \quad 4 = 2^2; \quad 2 = 2^1; \quad 1 = 2^0; \quad \frac{1}{2} = 2^{-1}; \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2};$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}.$$

$$\text{б) } \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3}; \quad \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2}; \quad \frac{1}{5} = 5^{-1}; \quad 1 = 5^0; \quad 5 = 5^1; \\ 25 = 5^2; \quad 125 = 5^3.$$

**№ 968.**

$$\text{а) } 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16};$$

$$\text{б) } (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{-27} = -\frac{1}{27};$$

$$\text{в) } (-1)^{-9} = \frac{1}{(-1)^9} = -1;$$

$$\text{е) } \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^3} = -\frac{1}{\frac{8}{27}} = -\frac{27}{8} = -3\frac{3}{8};$$

$$\text{з) } \left(-2\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{12}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{144}{25}} = \frac{25}{144};$$

$$\text{к) } 1,125^{-1} = \left(1\frac{125}{1000}\right)^{-1} = \left(1\frac{1}{8}\right)^{-1} = \left(\frac{9}{8}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{9}{8}} = \frac{8}{9}.$$

Многие учащиеся допускают ошибки при вычислении значений степеней с дробным основанием. И сами вычисления очень громоздкие, записываются в виде «многоэтажных» дробей. Необ-

ходимо научить учащихся рациональному приёму:  $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ .

Можно предложить в сильном классе самостоятельно провести доказательство:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = 1 \cdot \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Полученное равенство выносится на доску:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

**№ 970.**

$$\text{в)} \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9};$$

$$\text{г)} \left(1\frac{1}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64};$$

$$\text{е)} -\left(2\frac{1}{2}\right)^{-2} = -\left(\frac{5}{2}\right)^{-2} = -\left(\frac{2}{5}\right)^2 = -\frac{4}{25}.$$

• № 969 (а, в, д), 971, 972 (устно).

Эти три упражнения являются очень важными. Выводы, которые получают учащиеся, помогут им избежать ошибок в вычислении степеней, особенно «путаницы» в знаках результата.

**№ 969.**

$$\text{а)} -10^{-4} = -\frac{1}{10^4} = -\frac{1}{10000} = -0,0001;$$

$$\text{в)} (-0,8)^{-2} = \left(-\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} = 1\frac{9}{16};$$

$$\text{д)} -(-2)^{-3} = -\frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{-8} = \frac{1}{8}.$$

**№ 971.**

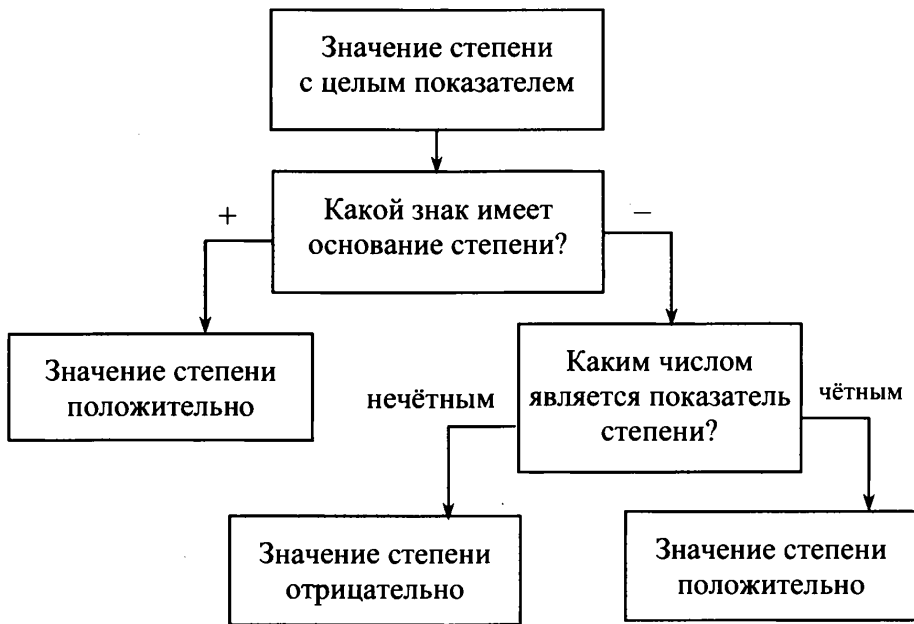
$$\text{а)} 9^{-5} = \frac{1}{9^5} > 0;$$

$$\text{б)} 2,6^{-4} = \left(2\frac{3}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{13}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{13}\right)^4 > 0;$$

$$в) (-7,1)^{-6} = \left(-\frac{71}{6}\right)^{-6} = \left(-\frac{10}{71}\right)^6 > 0;$$

$$г) (-3,9)^{-3} = \left(-\frac{39}{10}\right)^{-3} = \left(-\frac{10}{39}\right)^3 < 0.$$

После выполнения упражнения № 972 полезно дать учащимся задание по составлению блок-схемы полученного в выводе:



## VI. Итоги урока.

- Как определяется степень с целым отрицательным показателем?
- Чему равно любое число (не равное нулю) в нулевой степени?
- Какое значение имеет выражение  $0^n$  при целом  $n < 0$ ?
- Чему равно  $a^n \cdot a^{-n}$ ?
- Можно ли получить отрицательный результат при возведении положительного числа в отрицательную степень?

**Домашнее задание:** № 967, 968 (г, д, ж, и), 969 (б, г, е), 970 (а, б, д), 983.



## Урок 87

### НАХОЖДЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ СТЕПЕНИ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

**Цели:** закрепить знание определения степени с целым отрицательным показателем; продолжить формирование умения вычислять значение выражений, содержащих степени с целым показателем.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

Вычислите:

$$\begin{array}{llll} \text{а) } (-2)^4; & \text{г) } (-7)^2; & \text{ж) } 1^{-17}; & \text{к) } -2^2; \\ \text{б) } \left(-\frac{1}{2}\right)^3; & \text{д) } 8^{-1}; & \text{з) } 2^{-2}; & \text{л) } -\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}; \\ \text{в) } (-1)^5; & \text{е) } 10^0; & \text{и) } \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}; & \text{м) } \left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}. \end{array}$$

#### III. Формирование умений и навыков.

На этом уроке важно, чтобы учащиеся достигли определённого автоматизма в вычислениях степеней с целыми показателями, научились преобразовывать различные выражения, содержащие степени.

• № 973 (а, б), 974 (а, б), 975, 976.

В сильном классе упражнения № 973, 974 можно выполнить устно.

#### № 975.

При выполнении этого задания вспоминаем, что  $x^n \cdot x^{-n} = 1$ . Но не следует сразу пользоваться этим равенством, в этом упражнении отрабатывается также умение верно подставлять числовые значения буквенных выражений.

#### № 976.

$$\text{а) } 8 \cdot 4^{-3} = 8 \cdot \frac{1}{4^3} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8};$$

$$\text{б) } -2 \cdot 10^{-5} = -2 \cdot \frac{1}{100000} = -\frac{2}{100000} = -0,00002;$$

$$\text{в)} 18 \cdot (-9)^{-1} = 18 \cdot \frac{1}{(-9)^1} = -\frac{18}{9} = -2;$$

$$\text{г)} 10 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1} = 10 \cdot (-5)^1 = -50;$$

$$\text{д)} 3^{-2} + 4^{-1} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36};$$

$$\text{е)} 2^{-3} - (-2)^{-4} = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16};$$

$$\text{ж)} 0,5^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 2^2 + 3^1 = 4 + 3 = 7;$$

$$\text{з)} 0,3^0 + 0,1^{-4} = 1 + 10^4 = 10001.$$

• № 978 (а, в, д, ж, з), 979 (а, в, д, ж, з).

При выполнении этих заданий учащиеся должны уметь переходить от дроби к произведению и наоборот, пользуясь определением степени с целым отрицательным показателем.

**№ 978.**

$$\text{а)} 3x^{-5} = 3 \cdot \frac{1}{x^5} = \frac{3}{x^5};$$

$$\text{в)} 5ab^{-7} = 5a \cdot \frac{1}{b^7} = \frac{5a}{b^7};$$

$$\text{д)} x^{-1} \cdot c^{-3} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{c^3} = \frac{1}{xc^3};$$

$$\text{ж)} 2(x+y)^{-4} = 2 \cdot \frac{1}{(x+y)^4} = \frac{2}{(x+y)^4};$$

$$\text{з)} 10 \cdot x^{-1} \cdot (x-y)^{-3} = 10 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(x-y)^3} = \frac{10}{x(x-y)^3}.$$

**№ 979.**

$$\text{а)} \frac{3}{b^2} = 3b^{-2};$$

$$\text{в)} \frac{2a^8}{c^5} = 2a^8 \cdot c^{-5};$$

$$\text{д)} \frac{1}{x^2 y^3} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y^3} = x^{-2} \cdot y^{-3};$$

$$\text{ж)} \frac{2a}{(a-2)^2} = 2a \cdot \frac{1}{(a-2)^2} = 2a(a-2)^{-2};$$

$$3) \frac{(c+b)^5}{2(a-b)^4} = (c+b)^5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2(a-b)^4} = (c+b)^5 \cdot 2 \cdot (a-b)^{-4} = 2^{-1} \cdot (c+b)^5 \cdot (a-b)^{-4}.$$

• № 980 (б, г), 981 (б).

**№ 980.**

$$б) xy^{-1} + xy^{-2} = \frac{x}{y} + \frac{x}{y^2} = \frac{xy + x}{y^2};$$

$$г) (x - 2y^{-1})(x^{-1} + 2y) = \left(x - \frac{2}{y}\right) \left(\frac{1}{x} + 2y\right) = \frac{xy - 2}{y} \cdot \frac{1 + 2xy}{x} = \frac{(xy - 2) \cdot (1 + 2xy)}{xy}.$$

**№ 981.**

$$(a-b)^{-2} \cdot (a^{-2} - b^{-2}) = \frac{1}{a-b} \cdot \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{(a-b)^2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} = \frac{b^2 - a^2}{(a-b)^2 a^2 b^2} = \frac{(b-a)(b+a)}{(b-a)^2 a^2 b^2} = \frac{a+b}{a^2 b^2 (b-a)}.$$

#### IV. Проверочная работа.

##### Вариант 1

1. Замените дробь степенью с целым отрицательным показателем:

$$а) \frac{1}{2^5}; \quad б) \frac{1}{x^6}; \quad в) \frac{1}{a}; \quad г) \frac{1}{23^4}.$$

2. Замените дробью степень с целым отрицательным показателем:

$$а) 7^{-3}; \quad б) y^{-10}; \quad в) b^{-1}; \quad г) (3a)^{-4};$$

3. Преобразуйте в дробь выражение  $(x^{-2} - y^{-2}) : (x^{-1} - y^{-1})$ .

##### Вариант 2

1. Замените дробь степенью с целым отрицательным показателем:

$$а) \frac{1}{3^4}; \quad б) \frac{1}{x^{10}}; \quad в) \frac{1}{b}; \quad г) \frac{1}{32}.$$

2. Замените дробью степень с целым отрицательным показателем:

а)  $5^{-7}$ ;                      б)  $a^{-11}$ ;                      в)  $x^{-1}$ ;                      г)  $(2y)^{-5}$ .

3. Преобразуйте в дробь выражение  $(x^{-3} - 1)(1 - x)^{-2} \cdot x^3$ .

### V. Итоги урока.

– Как вычислить значение степени с целым отрицательным показателем?

– Как рациональнее возвести дробь в степень с целым отрицательным показателем?

– В каком случае значение степени с целым отрицательным показателем будет отрицательным?

– Чему равно значение выражения  $\frac{1}{5^{-2}}$ ?

**Домашнее задание:** № 973 (в, г), 974 (в, г), 977, 980 (а, в), 981 (а), 982.

## Урок 88

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ СТЕПЕНИ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ВЫРАЖЕНИЙ

**Цели:** изучить свойства степени с целым показателем; формировать умение применять данные свойства для нахождения значения выражения.

### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

Вычислите:

а)  $5^{-3}$ ;                      б)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ ;                      в)  $(-11)^{-2}$ ;

г)  $\left(\frac{9}{13}\right)^{-1}$ ;                      д)  $(-3)^{-2}$ ;                      е)  $\left(-\frac{1}{6}\right)^2$ ;

ж)  $2^{-5}$ ;                      з)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ ;                      и)  $(-3)^4$ .

### III. Объяснение нового материала.

Объяснение проводить по следующей схеме:

1. Актуализировать знания.

Вспомнить свойства степени с натуральным показателем и продемонстрировать их применение для преобразования и нахождения значений выражений.

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32;$$

$$3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2 = 9;$$

$$(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64;$$

$$(3 \cdot 4)^3 = 3^3 \cdot 4^3 = 27 \cdot 64 = 1728;$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}.$$

2. Сообщить учащимся, что все рассмотренные свойства распространяются и на степени с любым целым показателем. Единственное: что предполагаем: основание степени не равно нулю.

На доску выносятся запись:

Для каждого  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  и любых целых  $m$  и  $n$ :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (1)$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (2)$$

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n} \quad (3)$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (5)$$

Доказательство утверждений можно рассмотреть по учебнику на с. 207.

3. Привести примеры, показывающие применение свойств степени с целым показателем для нахождения значения выражения (с. 207–208 учебника, примеры 1–3).

### IV. Формирование умений и навыков.

На этом уроке необходимо начать формирование у учащихся следующих умений:

– непосредственно применять свойства степени с целым показателем для нахождения значения выражений;

– преобразовывать выражение в степень с «нужным» основанием для рационального применения свойств степени с целым показателем;

– упрощать выражения, используя свойства степени с целым показателем.

• Выполнение заданий по учебнику.

**№ 985.**

а)  $3^{-4} \cdot 3^6 = 3^{-4+6} = 3^2 = 9;$

б)  $2^4 \cdot 2^{-3} = 2^{4-3} = 2;$

в)  $10^8 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-6} = 10^{8-5-6} = 10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001;$

г)  $2^{10} : 2^{12} = 2^{10-12} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4};$

д)  $5^{-3} : 5^{-3} = 5^{-3-(-3)} = 5^0 = 1;$

е)  $3^{-4} : 3 = 3^{-4-1} = 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243};$

ж)  $(2^{-4})^{-1} = 2^{-4 \cdot (-1)} = 2^4 = 16;$

з)  $(5^2)^{-2} \cdot 5^3 = 5^{-4} \cdot 5^3 = 5^{-4+3} = 5^{-1} = \frac{1}{5};$

и)  $3^{-4} \cdot (3^{-2})^{-4} = 3^{-4} \cdot 3^8 = 3^{-4+8} = 3^4 = 81.$

№ 987, 988 – самостоятельное решение (два ученика у доски).

**№ 989.**

а)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27;$

б)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3};$

в)  $0,01^{-2} = 100^2 = 10000;$

г)  $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625};$

д)  $0,002^{-1} = \frac{1000}{2} = 500;$

е)  $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-5} = \left(-\frac{4}{3}\right)^{-5} = \left(-\frac{3}{4}\right)^5 = -\frac{243}{1024}.$

**№ 990.**

$$а) 27 \cdot 3^{-4} = 3^3 \cdot 3^{-4} = 3^{3-4} = 3^{-1} = \frac{1}{3};$$

$$б) (3^{-1})^5 \cdot 81^2 = 3^{-5} \cdot (3^4)^2 = 3^{-5} \cdot 3^8 = 3^{-5+8} = 3^3 = 27;$$

$$в) 9^{-2} : 3^{-6} = (3^2)^{-2} : 3^{-6} = 3^{-4} : 3^{-6} = 3^{-4-(-6)} = 3^2 = 9;$$

$$г) 81^3 : (9^{-2})^{-3} = (3^4)^3 : 9^6 = 3^{12} : (3^2)^6 = 3^{12} : 3^{12} = 3^{12-12} = 3^0 = 1.$$

**№ 992.**

$$а) 5^m \cdot 5^{m+1} \cdot 5^{1-m} = 5^{m+m+1+1-m} = 5^{m+2};$$

$$б) (5^m)^2 \cdot (5^{-3})^m = 5^{2m} \cdot 5^{-3m} = 5^{2m-3m} = 5^{-m};$$

$$в) 625 : 5^{4m-2} = 5^4 : 5^{4m-2} = 5^{4-4m+2} = 5^{6-4m}.$$

**№ 993.**

При выполнении этого упражнения учащиеся должны сами определить, в виде степени с каким основанием им удобно и необходимо представить выражение.

$$а) 8^{-2} \cdot 4^3 = (2^3)^{-2} \cdot (2^2)^3 = 2^{-6} \cdot 2^6 = 2^0 = 1;$$

$$б) 9^{-6} \cdot 27^5 = (3^2)^{-6} \cdot (3^3)^5 = 3^{-12} \cdot 3^{15} = 3^{-12+15} = 3^3 = 27;$$

$$в) 10^0 : 10^{-3} = 10^{0+3} = 10^3 = 1000;$$

$$г) 125^{-4} : 25^{-5} = (5^3)^{-4} : (5^2)^{-5} = 5^{-12} : 5^{-10} = 5^{-12+10} = 5^{-2} = \frac{1}{25};$$

$$д) \frac{2^{-21}}{4^{-5} \cdot 4^{-6}} = \frac{2^{-21}}{4^{-11}} = \frac{2^{-21}}{2^{-22}} = 2^{-21+22} = 2;$$

$$е) \frac{4^{-2} \cdot 8^{-6}}{2^{-22}} = \frac{2^{-4} \cdot 2^{-18}}{2^{-22}} = \frac{2^{-22}}{2^{-22}} = 1;$$

$$ж) \frac{3^{-10} \cdot 9^8}{(-3)^2} = \frac{3^{-10} \cdot 9^8}{9} = 3^{-10} \cdot 9^7 = 3^{-10} \cdot 3^{14} = 3^4 = 81;$$

$$з) \frac{5^{-5} \cdot 25^{10}}{125^3} = \frac{5^{-5} \cdot 5^{20}}{5^9} = 5^{-5+20-9} = 5^6 = 15625.$$

• **Задание повышенной трудности для сильных учащихся.**

**№ 995.**

$$а) \frac{25^m}{5^{2m-1}} = \frac{5^{2m}}{5^{2m-1}} = 5^{2m-2m+1} = 5;$$

$$б) \frac{6^m}{2^{m-1} \cdot 3^{m+1}} = \frac{2^m \cdot 3^m}{2^{m-1} \cdot 3^{m+1}} = 2^{m-m+1} \cdot 3^{m-m-m} = 2^{-1} \cdot 3^{-1} = \frac{2}{3}.$$

## У. Итоги урока.

– Сформулируйте правила умножения и деления степеней с одинаковым основанием.

– Сформулируйте правило возведения в целую степень произведения и дроби.

– Сформулируйте правило возведения степени в степень.

**Домашнее задание:** № 986, 991, 994, 1072.

## Урок 89

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ СТЕПЕНИ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ

**Цель:** продолжить формирование умения применять свойства степени с целым показателем.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

Вычислите:

|                                    |                                       |                                      |                                       |
|------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| а) $10^{-2}$ ;                     | г) $\left(\frac{1}{11}\right)^{-1}$ ; | ж) $5^{-3}$ ;                        | к) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$ ;  |
| б) $3^{-3}$ ;                      | д) $0,3^{-1}$ ;                       | з) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ ; | л) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ . |
| в) $\left(-\frac{1}{7}\right)^2$ ; | е) $4^{-2}$ ;                         | и) $\left(-\frac{1}{8}\right)^2$ ;   |                                       |

#### III. Проверочная работа.

##### Вариант 1

1. Вычислите:

|                        |                         |  |
|------------------------|-------------------------|--|
| а) $7 \cdot 14^{-1}$ ; | в) $3^{-2} + 6^{-1}$ ;  | д) $9 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ ; |
| б) $-5 \cdot 2^{-3}$ ; | г) $5^{-1} - 10^{-1}$ ; | е) $137 - 0,1^{-2}$ .                    |



2. Представьте в виде дроби:

а)  $x^{-1} + y^{-1}$ ;

б)  $ab^{-2} - a^2b$ ;

в)  $(m - n)^{-3}$ .

### В а р и а н т 2

1. Вычислите:

а)  $3^{-2} \cdot 72$ ;

в)  $8^{-1} + 2^{-2}$ ;

д)  $-3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ ;

б)  $-2 \cdot 5^{-3}$ ;

г)  $4^{-1} - 12^{-1}$ ;

е)  $0,01^{-1} - 165$ .

2. Представьте в виде дроби:

а)  $x^{-2} + y^{-2}$ ;

б)  $x^{-1}y + xy^{-1}$ ;

в)  $(x - y)^{-2}$ .

### IV. Формирование умений и навыков.

На этом уроке формируется умение выполнять преобразования и упрощать выражения, содержащие степень с целым показателем.

• № 996 (устно), 997, 998 (б, г), 999, 1000, 1002, 1004 (б, г).

**№ 997.**

а)  $a^{12} = a^{4 \cdot 3} = (a^4)^3$ ;

б)  $a^{12} = a^{-6 \cdot (-2)} = (a^{-6})^{-2}$ .

**№ 998.**

б)  $x^0 : x^{-5} = x^{0 - (-5)} = x^5$ ;

б)  $x^6 : x^{n-2} = x^{6 - (n-2)} = x^{4-n}$ .

**№ 999.**

а)  $1,5ab^{-3} \cdot 6a^{-2}b = 1,5 \cdot 6 \cdot a^{1-2} \cdot b^{-3+1} = 9a^{-1}b^{-2}$ ;

б)  $\frac{3}{4}m^{-2}n^4 \cdot 8m^3n^{-2} = \frac{3}{4} \cdot 8 \cdot m^{-2+3} \cdot n^{4-2} = 6mn^2$ ;

в)  $0,6c^2d^4 \cdot \frac{1}{3}c^{-2}d^{-4} = 0,6 \cdot \frac{1}{3} \cdot c^{2-2} \cdot d^{4-4} = 0,2c^0d^0 = 0,2$ ;

г)  $3,2x^{-1}y^{-5} \cdot \frac{5}{8}xy = 3,2 \cdot \frac{5}{8} \cdot x^{-1+1} \cdot y^{-5+1} = 2x^0y^{-4} = 2y^{-4}$ ;

д)  $\frac{1}{2}p^{-1} \cdot q^{-3} \cdot \frac{1}{6}p^2q^{-5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}p^{-1+2} \cdot q^{-3-5} = \frac{1}{12}pq^{-8}$ ;

е)  $3\frac{1}{3}a^5b^{-18} \cdot 0,6a^{-1}b^{20} = \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot a^{5-1} \cdot b^{-18+20} = 2a^4b^2$ .

**№ 1000.**

а)  $0,2a^{-2}b^4 \cdot 5a^3b^{-3} = 0,2 \cdot 5a^{-2+3} \cdot b^{4-3} = a \cdot b$ ;

при  $a = -0,125$ ,  $b = 8$

$ab = (-0,125) \cdot 8 = -1$ .

$$б) \frac{1}{27} a^{-1} b^{-5} \cdot 81 a^2 b^4 = \frac{1}{27} \cdot 81 \cdot a^{-1+2} \cdot b^{-5+4} = 3 a b^{-1} = \frac{3a}{b};$$

$$\text{при } a = \frac{1}{7}, b = \frac{1}{14} \quad \frac{3a}{b} = \frac{3 \cdot \frac{1}{7}}{\frac{1}{14}} = \frac{3}{7} \cdot 14 = 6.$$

**№ 1002.**

$$а) (a^{-1} b^{-1})^{-2} = (a^{-1})^{-2} \cdot (b^{-1})^{-2} = a^2 b^2;$$

$$б) (x^3 y^{-1})^2 (x^3)^2 \cdot (y^{-1})^2 = x^6 y^{-2};$$

$$в) (0,5 \cdot a^{-3} b^5)^{-12} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-12} \cdot (a^{-3})^{-12} \cdot (b^5)^{-12} = 2^{12} \cdot a^{36} b^{-60};$$

$$г) (-2m^5 n^{-3})^2 = (-2)^2 \cdot (m^5)^2 \cdot (n^{-3})^2 = 4m^{10} n^{-6};$$

$$д) \left(\frac{1}{3} p^{-2} \cdot q^2\right)^{-3} = (3^{-1})^{-3} \cdot (p^{-2})^{-3} \cdot (q^2)^{-3} = 3^3 p^6 q^{-6} = 27 p^6 q^{-6};$$

$$е) (-0,5x^{-3} y^4)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (x^{-3})^3 \cdot (y^4)^3 = -\frac{1}{8} x^{-9} y^{12}.$$

• № 1005 (б, г), 1007 (б, г), 1008 (б, г).

Перед выполнением этих упражнений следует повторить правило умножения дробей.

**№ 1005.**

$$б) \frac{63a^2}{2b^{-5}} \cdot \frac{18b^2}{7a} = \frac{63a^2 \cdot 18b^2}{2b^{-5} \cdot 7a} = 81a^{2-1} \cdot b^{2-(-5)} = 81ab^7;$$

$$г) \frac{16p^{-1}q^2}{5} \cdot \frac{25p^6}{64q^{-8}} = \frac{16p^{-1}q^2 \cdot 25p^6}{5 \cdot 64q^{-8}} = \frac{5}{4} \cdot q^{2+8} \cdot p^{6-1} = 1,25p^5 q^{10}.$$

**№ 1007.**

$$б) \left(\frac{a^{-3}b^4}{9}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{a^{-2}b^3}\right)^{-3} = \left(\frac{9}{a^{-3}b^4}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^{-2}b^3}{3}\right)^3 = \\ = \frac{81}{a^{-6} \cdot b^8} \cdot \frac{a^{-6} \cdot b^9}{27} = 3b;$$

$$\begin{aligned}
 \text{г) } & \left(\frac{x^2 y^{-3}}{6z}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{x^2 y^{-2}}{9z}\right)^2 = \left(\frac{6z}{x^2 y^{-3}}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^2 y^{-2}}{9z}\right)^2 = \\
 & = \frac{216z^3}{x^6 \cdot y^{-9}} \cdot \frac{x^4 y^{-4}}{81z^2} = \frac{8}{3} \cdot x^{4-6} \cdot y^{-4+9} \cdot z^{3-2} = 2\frac{2}{3} x^{-2} y^5 z.
 \end{aligned}$$

**№ 1008.**

$$\text{б) } 4a^7 b^{-1} \cdot \left(\frac{ab}{5}\right)^{-1} = 4a^7 b^{-1} \cdot \frac{5}{ab} = 20a^{7-1} b^{-1-1} = 20a^6 b^{-2}.$$

$$\text{г) } \left(\frac{2x^2}{y^3}\right)^{-1} \cdot (x^{-1}y)^3 = \frac{y^3}{2x^2} \cdot x^{-3} \cdot y^3 = \frac{1}{2} x^{-3-2} \cdot y^{3+3} = \frac{1}{2} x^{-5} y^6.$$

• Задание повышенной трудности для сильных учащихся.

**№ 1009.**

$$\text{По теореме Виета } x_1 + x_2 = \frac{3}{4} \text{ и } x_1 \cdot x_2 = \frac{n}{8}.$$

$$x_1^{-1} + x_2^{-1} = 6; \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 6; \quad \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = 6.$$

Подставляем в уравнение соответствующие значения и получаем:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{n}{8}} = 6; \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{n} = 6; \quad \frac{6}{n} = 6; \quad n = 1.$$

Ответ: 1.

## V. Итоги урока.

– Сформулируйте правила умножения и деления степеней с одинаковым основанием.

– Сформулируйте правила возведения в целую степень произведения и дроби.

– Сформулируйте правило возведения степени в целую степень.

**Домашнее задание:** № 1001, 1003, 1004 (а, в), 1006, 1007 (а, в).

## Урок 90

### СТАНДАРТНЫЙ ВИД ЧИСЛА

**Цели:** ввести понятие *стандартный вид числа*; формировать умение применять его при решении задач.

#### Ход урока

#### I. Организационный момент.

#### II. Устная работа.

Заполните пустые клеточки:

а)  $25 = \square^2$ ;

г)  $\frac{1}{81} = 3^{\square}$ ;

ж)  $(y^{\square})^{14} = y^{-28}$ ;

б)  $81 = 3^{\square}$ ;

д)  $(a^3)^8 = a^{\square}$ ;

з)  $(ab^2)^{-6} = a^{\square}b^{\square}$ ;

в)  $625 = (5^2)^{\square}$ ;

е)  $x^{-8} = (x^2)^{\square}$ ;

и)  $\left(\frac{x^{\square}}{y}\right)^3 = x^{-6}y^{\square}$ .

#### III. Самостоятельная проверочная работа.

##### Вариант 1

Упростите выражение:

1)  $6x^{-5}y^7 \cdot 2,5x^7y^{-6}$ ;

3)  $\frac{13x^{-4}}{y^{-6}} \cdot \frac{y}{52x^{-5}}$ ;

2)  $3,2a^6b : (0,8a^3b^{-3})$ ;

4)  $\left(\frac{9m^{-3}}{5n^{-1}}\right)^{-2} \cdot 81m^{-6}n^3$ .

##### Вариант 2

Упростите выражение:

1)  $2,2a^{-8}b^5 \cdot 5a^{10}b^{-4}$ ;

3)  $\frac{14a}{b^{-3}} \cdot \frac{b^{-2}}{56a^{-4}}$ ;

2)  $2,8m^8n : (0,7m^4n^{-2})$ ;

4)  $\left(\frac{5x^{-2}}{6y^{-1}}\right)^{-3} \cdot 125x^{-6}y^5$ .

#### IV. Объяснение нового материала.

Согласно пункту учебника ввести понятие *стандартного вида числа*. Вынести на доску запись:

Стандартный вид числа:  $a \cdot 10^n$ ,  
где  $1 \leq a < 10$ ,  $n$  – целое число,  $n$  – порядок числа

После этого дать учащимся задание, которое направлено на усвоение данного понятия.

**Задание.** Определите, какие из чисел записаны в стандартном виде, а какие – нет. Ответ объясните:

- а)  $2,3 \cdot 10^9$ ;      г)  $8 \cdot 10^{-5}$ ;      ж)  $-3 \cdot 10^{-15}$ ;  
б)  $1,23 \cdot 10^{-11}$ ;      д)  $4,2 \cdot 100^5$ ;      з)  $0,24 \cdot 10^{-17}$ ;  
в)  $15 \cdot 10^{14}$ ;      е)  $5,8 \cdot 10^{23}$ ;      и)  $10 \cdot 10^4$ .

После усвоения понятия показать, как оно может быть применено на практике (разобрать примеры на с. 211–212 учебника).

### **V. Формирование умений и навыков.**

- № 1013 (устно), 1014, 1015 (б, г), 1016 (б, г, е, з), 1017, 1018.

– Представьте в виде степени числа 10 выражение:

- а)  $1000 \cdot 10^{-6}$ ;      д)  $0,1 \cdot 100 \cdot 10^{-5}$ ;  
б)  $10^{-10} \cdot 10^{-5}$ ;      е) 10000;  
в)  $10^{-8} : 10^4$ ;      ж) 0,001;  
г)  $(10^{-2})^3$ ;      з)  $0,01 \cdot 100$ .

#### **№ 1014.**

а)  $52000000 = 5,2 \cdot 10^7$ ;

**Примечание.** На этом примере разбираем, что в стандартном виде числа  $a \cdot 10^n$ ,  $a \in [1; 10)$ . В исходном числе мы перенесли запятую на 7 цифр влево, то есть уменьшили число в  $10^7$  раз. Поэтому 52000000 больше 5,2 в  $10^7$  раз.

- б)  $2180000 = 2,18 \cdot 10^6$ ;  
в)  $675000000 = 6,75 \cdot 10^8$ ;  
г)  $40,44 = 4,044 \cdot 10^1$ ;  
д)  $0,00281 = 2,81 \cdot 10^{-3}$ .

**Примечание.** На этом примере разбираем, что в исходном числе мы перенесли запятую на 3 цифры вправо, то есть увеличили число в  $10^3$  раз. Поэтому 0,00281 меньше 2,81 в  $10^3$  раз.

е)  $0,0000035 = 3,5 \cdot 10^{-6}$ .

#### **№ 1015.**

- б)  $117 \cdot 10^5 = 1,17 \cdot 10^2 \cdot 10^5 = 1,07 \cdot 10^7$ ;  
г)  $0,06 \cdot 10^5 = 6 \cdot 10^{-2} \cdot 10^5 = 6 \cdot 10^3$ .

**№ 1016.**

б)  $6000000 = 6 \cdot 10^6$ ;

г)  $0,85 = 8,5 \cdot 10^{-1}$ ;

е)  $0,000282 = 2,82 \cdot 10^{-4}$ ;

з)  $0,042 \cdot 10^2 = 4,2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 = 4,2 \cdot 10^0$ .

**№ 1017.**

Масса Земли равна  $6 \cdot 10^{21}$  т.

Масса атома водорода равна  $1,7 \cdot 10^{-21}$  г.

**№ 1018.**

а)  $3,8 \cdot 10^3$  (т) =  $3,8 \cdot 10^3 \cdot 10^3$  (кг) =  $3,8 \cdot 10^3 \cdot 10^6$  (г) =  $3,8 \cdot 10^9$  (г);

б)  $1,7 \cdot 10^{-4}$  (км) =  $1,7 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3$  (м) =  $1,7 \cdot 10^{-1} \cdot 10^2$  (см) =  $1,7 \cdot 10$  (см);

в)  $8,62 \cdot 10^{-1}$  (кг) =  $8,62 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3}$  (т) =  $8,62 \cdot 10^{-4}$  (т);

г)  $5,24 \cdot 10^5$  (см) =  $5,24 \cdot 10^5 \cdot 10^{-2}$  (м) =  $5,24 \cdot 10^3$  (м).

– Выполните действия. Результат запишите числом в стандартном виде:

а)  $(2,8 \cdot 10^5) \cdot (2,5 \cdot 10^{-7})$ ;

б)  $(5,7 \cdot 10^4) : (3,8 \cdot 10^{-3})$ ;

в)  $6,2 \cdot 10^{-2} + 4,8 \cdot 10^{-2}$ .

**Решение**

а)  $(2,8 \cdot 10^5) \cdot (2,5 \cdot 10^{-7}) = (2,8 \cdot 2,5) \cdot (10^5 \cdot 10^{-7}) = 7 \cdot 10^{-2}$ .

б)  $(5,7 \cdot 10^4) : (3,8 \cdot 10^{-3}) = (5,7 : 3,8) \cdot (10^4 : 10^{-3}) = 1,5 \cdot 10^7$ .

в)  $6,2 \cdot 10^{-2} + 4,8 \cdot 10^{-2} = 10^{-2} \cdot (6,2 + 4,8) = 11 \cdot 10^{-2} = 1,1 \cdot 10^{-3}$ .

**VI. Итоги урока.**

– Как записывается число в стандартном виде?

– Записаны ли числа  $11 \cdot 10^8$  и  $0,93 \cdot 10^{-5}$  в стандартном виде? Почему?

– Если число записано в стандартном виде, что называется его порядком?

– Для чего на практике применяется запись чисел в стандартном виде?

**Домашнее задание:** № 1015 (а, в), 1016 (а, в, д, ж), 1019, 1020, 10226.



2. Выполните действия:

а)  $(7,8 \cdot 10^{-4}) \cdot (3,5 \cdot 10^{-6})$ ;

б)  $(3,36 \cdot 10^{-3}) : (4,8 \cdot 10^{-7})$ ;

в)  $5,2 \cdot 10^4 + 2,8 \cdot 10^5$ .

Решение заданий проверочной работы

### Вариант 1

1. а)  $70000 = 7 \cdot 10^4$ ;

д)  $28 \cdot 10^5 = 2,8 \cdot 10^6$ ;

б)  $60,3 = 6,03 \cdot 10$ ;

е)  $563 \cdot 10^{-4} = 5,63 \cdot 10^{-2}$ ;

в)  $14200,5 = 1,42005 \cdot 10^4$ ;

ж)  $0,031 \cdot 10^6 = 3,1 \cdot 10^4$ ;

г)  $0,56 = 5,6 \cdot 10^{-1}$ ;

з)  $0,0077 \cdot 10^{-2} = 7,7 \cdot 10^{-5}$ .

2. а)  $(1,5 \cdot 10^{-3}) \cdot (9,2 \cdot 10^{-4}) = (1,5 \cdot 9,2) \cdot (10^{-3} \cdot 10^{-4}) =$   
 $= 13,8 \cdot 10^{-7} = 1,38 \cdot 10 \cdot 10^{-7} = 1,38 \cdot 10^{-6}$ ;

б)  $(1,56 \cdot 10^{-2}) : (2,6 \cdot 10^{-6}) = (1,56 : 2,6) \cdot (10^{-2} : 10^{-6}) =$   
 $= 0,6 \cdot 10^4 = 6 \cdot 10^{-1} \cdot 10^4 = 6 \cdot 10^3$ ;

в)  $5,1 \cdot 10^5 + 2,9 \cdot 10^6 = 0,51 \cdot 10^6 + 2,9 \cdot 10^6 = 10^6 (0,51 + 2,9) =$   
 $= 3,41 \cdot 10^6$ .

### Вариант 2

1. а)  $900000 = 9 \cdot 10^5$ ;

д)  $47 \cdot 10^4 = 4,7 \cdot 10^5$ ;

б)  $800,5 = 8,005 \cdot 10^2$ ;

е)  $672 \cdot 10^{-5} = 6,72 \cdot 10^{-3}$ ;

в)  $2400,8 = 2,4008 \cdot 10^3$ ;

ж)  $0,0055 \cdot 10^7 = 5,5 \cdot 10^4$ ;

г)  $0,73 = 7,3 \cdot 10^{-1}$ ;

з)  $0,046 \cdot 10^{-3} = 4,6 \cdot 10^{-5}$ .

2. а)  $(7,8 \cdot 10^{-4}) \cdot (3,5 \cdot 10^{-6}) = (7,8 \cdot 3,5) \cdot (10^{-4} \cdot 10^{-6}) =$   
 $= 27,3 \cdot 10^{-10} = 2,73 \cdot 10 \cdot 10^{-10} = 2,73 \cdot 10^{-9}$ ;

б)  $(3,36 \cdot 10^{-3}) : (4,8 \cdot 10^{-7}) = (3,36 : 4,8) \cdot (10^{-3} : 10^{-7}) =$   
 $= 0,7 \cdot 10^4 = 7 \cdot 10^{-1} \cdot 10^4 = 7 \cdot 10^3$ ;

в)  $5,2 \cdot 10^4 + 2,8 \cdot 10^5 = 0,52 \cdot 10^5 + 2,8 \cdot 10^5 = 10^5 (0,52 + 2,8) =$   
 $= 3,32 \cdot 10^5$ .

## IV. Формирование умений и навыков.

На этом уроке учащиеся должны сравнивать и упорядочивать числа, записанные в стандартном виде, переходить от одних единиц измерения к другим, округлять числа.

1. Сравните числа:

а)  $1,78 \cdot 10^6$  и  $2,1 \cdot 10^6$ ;

в)  $8,3 \cdot 10^4$  и  $1,4 \cdot 10^5$ ;

б)  $3,9 \cdot 10^{-8}$  и  $6,5 \cdot 10^{-8}$ ;

г)  $4,7 \cdot 10^{-7}$  и  $5,8 \cdot 10^{-8}$ .



При решении этих упражнений выводим свойство, что удобно сравнивать числа одного порядка. Если числа разного порядка, то больше то число, порядок которого больше.

### Решение

- а)  $1,78 < 2,1$ , значит,  $1,78 \cdot 10^6 < 2,1 \cdot 10^6$ ;  
б)  $3,9 < 6,5$ , значит,  $3,9 \cdot 10^{-8} < 6,5 \cdot 10^{-8}$ ;  
в) Порядок числа  $1,4 \cdot 10^5$  больше порядка числа  $8,3 \cdot 10^4$ , значит,  $1,4 \cdot 10^5 > 8,3 \cdot 10^4$ ;  
г) Порядок числа  $4,7 \cdot 10^{-7}$  больше порядка числа  $5,8 \cdot 10^{-8}$ , значит,  $4,7 \cdot 10^{-7} > 5,8 \cdot 10^{-8}$ .

2. Порядок числа  $a$  равен  $-12$ . Каков порядок числа:

- а)  $100a$ ;      б)  $0,001a$ ;      в)  $a \cdot 10^{15}$ ;      г)  $\frac{a}{10^{-20}}$ ?

### Решение

Так как порядок числа  $a$  равен  $-12$ , то его стандартный вид  $b \cdot 10^{-12}$ , где  $1 \leq b < 10$ , тогда:

а)  $100a = 100 \cdot b \cdot 10^{-12} = b \cdot 10^2 \cdot 10^{-12} = b \cdot 10^{-10}$ , порядок числа равен  $-10$ .

б)  $0,001a = 0,001 \cdot b \cdot 10^{-12} = b \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-12} = b \cdot 10^{-15}$ , порядок числа равен  $-15$ .

в)  $a \cdot 10^{15} = b \cdot 10^{-12} \cdot 10^{15} = b \cdot 10^3$ , порядок числа равен  $3$ .

г)  $\frac{a}{10^{-20}} = \frac{b \cdot 10^{-12}}{10^{-20}} = b \cdot 10^{-12+20} = b \cdot 10^8$ , порядок числа равен  $8$ .

Ответ: а)  $-10$ ; б)  $-15$ ; в)  $3$ ; г)  $8$ .

### № 1021.

Формула пути  $S = V \cdot t$ ;

$t = 2,8 \cdot 10^6$  (с);  $V = 3 \cdot 10^5$  (км/с);

$S = (2,8 \cdot 10^6) \cdot (3 \cdot 10^5) = 8,4 \cdot 10^{11}$  (км).

Ответ:  $8,4 \cdot 10^{11}$  (км).

### № 1022.

$m_3 = 6,0 \cdot 10^{24}$  кг;  $m_M = 6,4 \cdot 10^{23}$  кг.

Порядок  $m_3$  больше порядка  $m_M$ , значит, масса Земли больше массы Марса.

Чтобы узнать, во сколько раз больше, найдём частное:

$$\frac{m_3}{m_M} = \frac{6,0 \cdot 10^{24}}{6,4 \cdot 10^{23}} = (6,0 : 6,4) \cdot (10^{24} : 10^{23}) = 0,9375 \cdot 10 = 9,375 \approx 9,4.$$

Ответ: масса Земли больше массы Марса в  $\approx 9,4$  раза.

### № 1024.

$$\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad \rho = \frac{m}{V}; \quad m = \rho \cdot V.$$

Найдём объём железной пластины:

$$V = 1,2 \cdot 6 \cdot 10^{-1} \cdot 2,5 \cdot 10^{-1} = 18 \cdot 10^{-2} = 1,8 \cdot 10^{-1} \text{ (м}^3\text{)};$$

$$m = 7,8 \cdot 10^3 \cdot 1,8 \cdot 10^{-1} = 14,04 \cdot 10^2 = 1,404 \cdot 10^3 \text{ (кг)}.$$

Ответ:  $1,404 \cdot 10^3$  кг.

### V. Итоги урока.

- Какую запись числа называют его стандартным видом?
- Покажите на примере, как представить число в стандартном виде.
- Как сравнивают числа одного порядка?
- Как сравнивают числа разного порядка?
- Какие физические величины выражают числами стандартного вида? Приведите примеры.

## Урок 92

### НАХОЖДЕНИЕ СРЕДНИХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

**Цели:** ввести понятия частоты появления числа в ряду, таблицы частот и таблицы относительных частот; формировать умения составлять таблицы частот, находить средние статистические характеристики.

### Ход урока

#### I. Организационный момент.

## II. Устная работа.

Даны ряды:

1) 4; 1; 8; 5; 7.    2)  $\frac{1}{3}$ ; 9; 3; 0,5;  $\frac{1}{7}$ .    3) 6; 0,2;  $\frac{5}{4}$ ; 4; 7,3.

Найдите:

- наибольшее и наименьшее значение каждого ряда;
- размах каждого ряда.

## III. Объяснение нового материала.

Объяснение проводить согласно пункту учебника.

Познакомить учащихся с элементами статистики как научного направления. Прежде всего речь идёт об элементах так называемой «описательной» статистики, которая занимается вопросами сбора и представления первичной статистической информации в табличной и графической формах, вычисления числовых характеристик для совокупности статистических данных.

На примере таблицы частот со с. 215 учебника показываем, как анализируются данные статистического исследования, какие обобщающие показатели используются.

Необходимо затем подытожить, какие статистические характеристики теперь могут находить учащиеся. Для этого на доску можно вынести пример:

Упорядоченный ряд чисел: 1; 2; 2; 3; 4; 4; 5; 5.

1) Размах:  $5 - 1 = 4$ ;

2) среднее арифметическое:  $\frac{1 + 2 \cdot 2 + 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3}{9} = \frac{31}{9}$ ;

3) Мода: 5;

4) Медиана: 4.

2. Вводится понятие таблицы относительных частот – таблица, в которой для каждого данного указывается не частота, а отношение частоты к общему числу данных в ряду, выраженное в процентах.

#### IV. Формирование умений и навыков.

На этом уроке учащиеся отрабатывают умения составления таблиц частот и таблиц относительных частот, а также статистических характеристик. Необходимо следить, чтобы учащиеся чётко мотивировали свои ответы, избегали формализации.

##### № 1028.

| Кандидат           | Алексеев | Иванов | Карпов |
|--------------------|----------|--------|--------|
| Количество голосов | 13       | 23     | 14     |

Проверяем, что  $13 + 23 + 14 = 50$ .

Данных недостаточно, чтобы сделать вывод о предстоящих результатах голосования.

– Подсчитывая число семян сорных растений в 15 одинаковых пакетах, получили такие данные:

3, 1, 0, 3, 2, 2, 1, 0, 1, 3, 2, 1, 0, 0, 2.

Представьте эти данные в виде таблицы частот.

##### Решение

|                         |   |   |   |   |
|-------------------------|---|---|---|---|
| Количество сорных семян | 0 | 1 | 2 | 3 |
| число пакетов           | 4 | 4 | 4 | 3 |

Проверяем, что  $4 + 4 + 4 + 3 = 15$ .

##### № 1030.

Находим общее число учащихся (сумма чисел в правом столбце);  $n = 625$ .

Относительные частоты вычисляем делением каждого числа в правом столбце на 625 и умножаем на 100 % (с округлением до 1 %):

|                           |   |   |   |    |    |    |    |
|---------------------------|---|---|---|----|----|----|----|
| Число выполненных заданий | 0 | 1 | 2 | 3  | 4  | 5  | 6  |
| Относительная частота, %  | 0 | 4 | 8 | 14 | 36 | 23 | 14 |

Проверяем:  $0 + 4 + 8 + 14 + 36 + 23 + 14 = 99$  %. А должно быть 100 %. Это результат округления. В таких случаях увеличивают на 1 число, которое имеет самую большую отброшенную дробную часть; в данном случае это  $\frac{53 \cdot 100 \%}{625} = 8,48$ ; в таблице процент выполнивших 2 задания следует записать 9 вместо 8.

### № 1031.

Наибольшее различие в числе допущенных ошибок:  $6 - 0 = 6$ .

Типичное число ошибок: 3 (встречается 26 раз из 70).

Использованы: размах и мода.

### № 1032.

1) Данные представлены в виде таблицы частот, поэтому среднее арифметическое находим по формуле.

$$x = \frac{2 \cdot 20 + 5 \cdot 12 + 10 \cdot 7 + 25 \cdot 4 + 100 \cdot 2}{20 + 12 + 7 + 4 + 2} = \frac{470}{45} \approx 10,44.$$

Эта величина характеризует среднее количество акций на руках одного сотрудника.

2) Размах  $A = x_{\max} - x_{\min} = 100 - 2 = 98$ .

Размах показывает, что разброс наблюдаемых значений очень велик.

3) Мода  $M = 2$  показывает, что наибольшее число сотрудников приобрело по 2 акции.

Ответ:  $\approx 10,44$ ;  $\approx 98$ ; 2.

### V. Итоги урока.

- Что называется таблицей частот?
- Какие данные заносятся в таблицу относительных частот?
- Какие существуют средние статистические характеристики?
- Объясните на примере, как по таблице частот находят среднее арифметическое, размах и моду.

**Домашнее задание:** № 1029, 1033, 1034, 1093.

## Урок 93

### ИНТЕРВАЛЬНЫЕ РЯДЫ

**Цели:** ввести понятия интервального ряда, характеристик выборочного исследования; формировать умение использовать данные понятия при решении задач.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Устная работа.

Для упорядоченных рядов найдите размах, среднее арифметическое, моду и медиану.

а) 0; 0; 1; 2; 3.    б) 1; 2; 2; 2; 3; 3.    в) 1; 2; 3; 4; 5; 5.

##### III. Проверочная работа.

#### Вариант 1

1. В таблице приведён возраст сотрудников одного из отделов:

|   | Фамилия  | Возраст |
|---|----------|---------|
| 1 | Синицын  | 42      |
| 2 | Воробьёв | 24      |
| 3 | Соловьёв | 30      |
| 4 | Чижов    | 24      |
| 5 | Лебедев  | 40      |

Найдите размах, моду, медиану и среднее арифметическое этого ряда.

2.\* Постройте ряд из четырёх чисел, у которого размах равен 2, а среднее арифметическое равно моде.

#### Вариант 2

1. В таблице приведено количество очков, набранных в чемпионате некоторыми стрелками:

|   | Фамилия  | Возраст |
|---|----------|---------|
| 1 | Кузнецов | 48      |
| 2 | Иванов   | 26      |
| 3 | Сидоров  | 20      |
| 4 | Петров   | 40      |
| 5 | Николаев | 26      |

Найдите размах, моду, медиану и среднее арифметическое этого ряда.

2.\* Постройте ряд из четырёх чисел, у которого размах равен 2, а среднее арифметическое равно медиане.

#### IV. Проверка домашнего задания.

№ 1034.

Среднее арифметическое находим по формуле:

$$x = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 16 + 2 \cdot 26 + 3 \cdot 17 + 4 \cdot 18 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 1}{100} =$$
$$= \frac{311}{100} = 3,11.$$

Среднее арифметическое характеризует уровень наблюдаемых значений, а при известном  $n = 100$  позволяет сразу определить общее число сорных семян во всех пакетах:

$$3,11 \cdot 100 = 311.$$

Мода  $M = 2$  показывает, что больше всего пакетов, в которых содержится по 2 семени сорняка.

Ответ: 3,11; 2.

#### V. Объяснение нового материала.

Объяснение проводить согласно пункту учебника.

1. Запись статистической информации в форме простого ряда имеет два наиболее существенных недостатка: громоздкость и труднообозримость (закономерности ряда не бросаются в глаза). В этих случаях для анализа данных строят *интервальный ряд*. Для этого разность между наибольшим и наименьшим значениями делят на несколько равных частей (примерно 5–10) и, округляя полученный результат, определяют длину интервала. За начало первого интервала часто выбирают наименьшее данное или ближайшее к нему целое число, его не превосходящее. Для каждого интервала указывают число данных, попадающих в этот интервал, или выраженное в процентах отношение этого числа к общей численности

данных. При этом граничное число обычно считают относящимся к последующему интервалу.

Рассмотреть пример со с. 217 учебника.

2. Вводится понятие выборочного исследования и выборочной совокупности (выборки), которая подвергается исследованию.

Репрезентативность выборки рассматривается на примере со с. 218 учебника.

## VI. Формирование умений и навыков.

### № 1035.

Для построения интервального ряда находим наименьшее и наибольшее значение результатов наблюдения:

$$x_{\min} = 15, x_{\max} = 39.$$

Определяем количество частичных интервалов:

$$k = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{5} = \frac{39 - 15}{5} = 4,8.$$

Мы увеличим  $x_{\max} = 39$  до  $x'_{\max} = 40$ , чтобы получить целое  $k$ . Так можно сделать, поскольку при этом мы не теряем ни одно наблюдавшееся значение и не допускаем никаких посторонних значений в результаты.

$$k = \frac{x'_{\max} - x_{\min}}{5} = \frac{40 - 15}{5} = 5.$$

Строим таблицу распределения интервального ряда.

| Время выполнения домашнего задания (мин) | 15–20 | 20–25 | 25–30 | 30–35 | 35–40 |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|
| Количество учащихся                      | 5     | 1     | 7     | 8     | 3     |

Поскольку  $x_{\min} = 15$  мин попало на границу первого интервала и мы включили это значение в интервал, то и во всех случаях попадания значений на границу интервалов будем включать эти значения в правый интервал.



**Задание 1.** В таблице показано распределение призывников района по росту:

| Рост, см | Частота |
|----------|---------|
| 155–160  | 6       |
| 160–165  | 10      |
| 165–170  | 28      |
| 170–175  | 36      |
| 175–180  | 48      |
| 180–185  | 26      |
| 185–190  | 16      |
| 190–195  | 8       |

По данным таблицы составьте новую таблицу с интервалом в 10 см.

### Решение

В таблице весь размах значений наблюдаемой величины (от 155 до 195 см) разбит на  $k = 8$  частичных интервалов шириной  $h = 5$  см. Объединим каждые два соседних интервала, начиная с первого, и просуммируем частоты соседних интервалов; получаем новую таблицу распределения с интервалом  $h_1 = 10$  см и числом интервалов  $k = 4$ .

| Рост, см | Частота |
|----------|---------|
| 155–165  | 16      |
| 165–175  | 64      |
| 175–185  | 74      |
| 185–195  | 24      |

**Задание 2.** Имеются следующие данные о распределении участников похода по возрасту:

| Возраст, лет     | 18–22 | 22–26 | 26–30 | 30–34 |
|------------------|-------|-------|-------|-------|
| Число участников | 25    | 18    | 5     | 2     |

Заменяя каждый интервал его серединой, найдите средний возраст участников похода.

## Решение

Средины интервалов имеют значения 20, 24, 28, 32 (лет).

Объём выборки  $n = 25 + 18 + 5 + 2 = 50$ .

Средний возраст участников похода:

$$T_{\text{ср}} = \frac{20 \cdot 25 + 24 \cdot 18 + 28 \cdot 5 + 32 \cdot 2}{50} = 22,72 \approx 23 \text{ года.}$$

Полученное значение является приблизительным, так как вместо реальных наблюдавшихся значений мы осредняли середины интервалов ряда распределения.

О т в е т :  $\approx 23$  года.

### № 1037.

а) Не является, так как примерно половина восьмиклассников – мальчики, у них есть свои особенности, а их не опрашивали.

б) Не является, так как время на выполнение уроков зависит от расписания, которое меняется по дням недели. В четверг готовят уроки на пятницу, а в пятницу могут быть уроки, не требующие большой подготовки.

в) Не является, так как гимназии и лицеи – это меньшая часть общеобразовательных учреждений со специальным отбором учащихся и специфическими особенностями учебных программ и перечня изучаемых предметов. Время на выполнение уроков в гимназиях и лицеях может отличаться от времени, затрачиваемого учениками обычных школ.

О т в е т : а) нет; б) нет; в) нет.

## VII. Итоги урока.

– В каком случае таблица частот не является удобной для анализа статистических данных?

– Что собой представляет интервальный ряд?

– Чем выборочное исследование отличается от сплошного?

– В каком случае выборка является репрезентативной? Приведите примеры.

Домашнее задание: № 1036, 1038, 1097.

## Урок 94

### СТОЛБЧАТЫЕ И КРУГОВЫЕ ДИАГРАММЫ

**Цели:** рассмотреть возможности наглядного представления статистической информации в виде диаграмм; формировать умение строить столбчатые и круговые диаграммы, характеризующие результаты статистических исследований.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Устная работа.

1. Вычислите:

- а) 25 % от 200;                      в) 50 % от 185;                      д) 75 % от 800;  
б) 12 % от 1000;                    г) 0,1 % от 4000;                    е) 3 % от 160.

2. Заполните пустые квадратики в пропорциях:

- а)  $360^\circ - 100\%$                       б)  $360^\circ - 100\%$                       в)  $360^\circ - 100\%$   
 $90^\circ - \square\%$ ;                               $72^\circ - \square\%$ ;                               $54^\circ - \square\%$ .

##### III. Объяснение нового материала.

1. Сообщение учащимся.

Статистическая информация может быть представлена в различных формах. Учащиеся уже знакомы с такими из них, как:

- простой статистический ряд;
- вариационный (упорядоченный) ряд;
- таблица частот;
- таблица относительных частот;
- интервальный ряд.

Наряду с этими формами представления статистических данных широко используется графическая форма.

Одним из хорошо известных способов наглядного представления ряда данных является построение *столбчатой диаграммы*. Они используются тогда, когда нужно проиллюстрировать *динамику изменения данных* во времени или *распределение данных* в результате статистического исследования.

Рассматриваем пример построения столбчатой диаграммы на с. 222 учебника.

2. Для наглядного изображения соотношения между частями исследуемой совокупности данных удобно использовать круговые диаграммы. Исходные данные для построения круговой диаграммы можно брать из таблицы относительных частот. В этом случае круг разбивается на секторы, центральные углы которых пропорциональны относительным частотам, определенным для каждой группы данных.

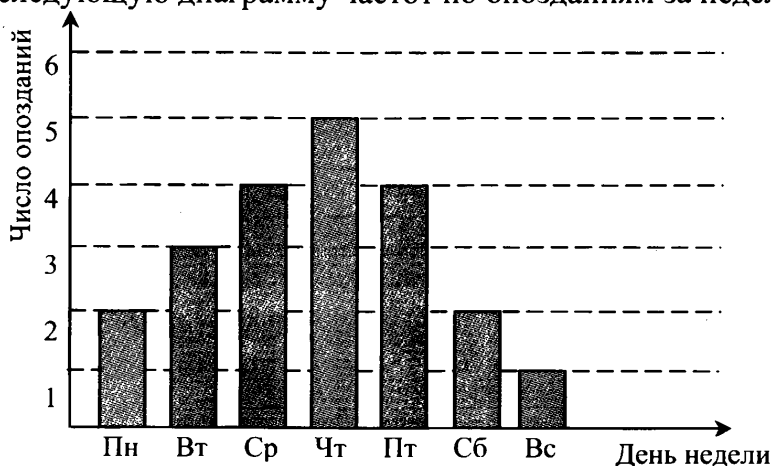
Рассматриваем пример построения круговой диаграммы со с. 223 учебника. Обращаем внимание на алгоритм вычисления величин центральных углов для секторов.

Замечаем, что круговая диаграмма сохраняет свою наглядность и выразительность лишь при небольшом числе частей совокупности. В противном случае иллюстрация получается «засоренной» и её применение малоэффективно.

#### IV. Формирование умений и навыков.

На этом уроке учащиеся приобретают навыки как построения диаграмм, так и интерпретации данных, показанных на диаграмме.

1. Жалобы на опоздание электричек, поступившие в диспетчерскую станцию Жуково в течение недели, позволили составить следующую диаграмму частот по опозданиям за неделю.



Определите среднее число опозданий за неделю.

## Решение

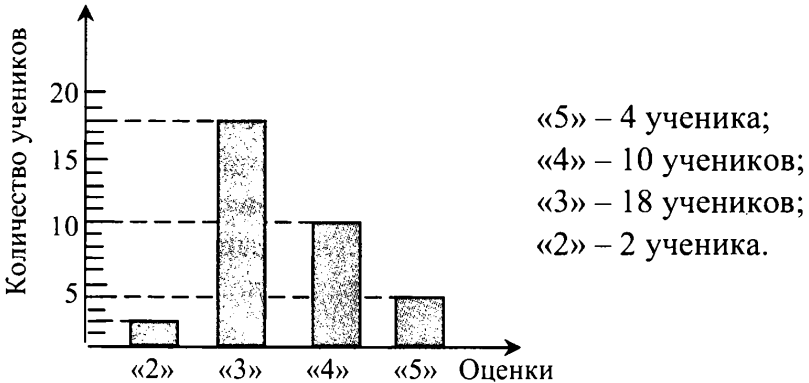
Найдём по диаграмме частот количество опозданий в каждый из семи дней недели и вычислим их среднее арифметическое  $x$ :

$$x = \frac{2+3+4+5+4+2+1}{7} = 3 - \text{среднее число опозданий за не-}$$

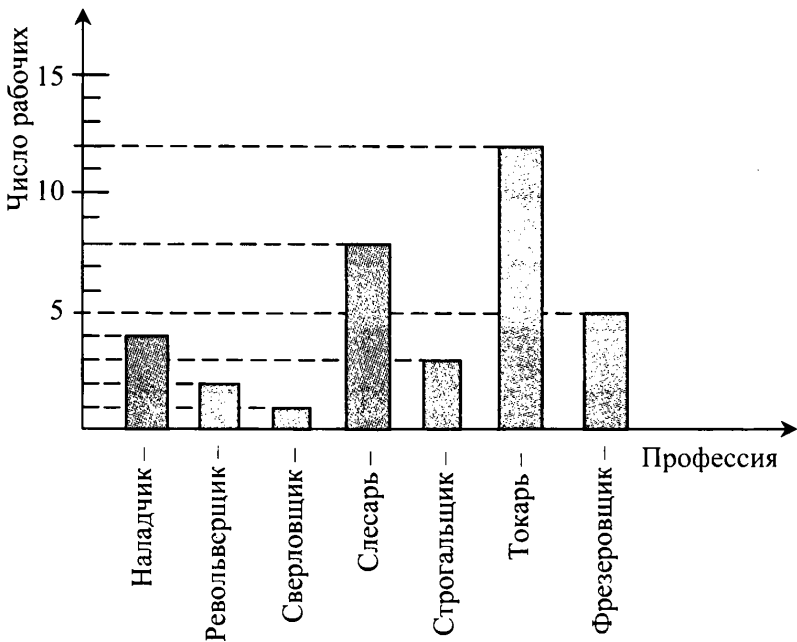
делю.

Ответ: 3.

### № 1042.



### № 1043.



**№ 1045.**

Определяем величину соответствующих углов:

$$\frac{360^\circ \cdot 12\%}{100\%} \approx 43^\circ; \quad \frac{360^\circ \cdot 40\%}{100\%} = 144^\circ; \quad \frac{360^\circ \cdot 48\%}{100\%} \approx 173^\circ.$$



2. Совокупный доход семьи из четырёх человек составляет 40 тыс. р. Распределение бюджета происходит следующим образом: 15 % – оплата коммунальных услуг;

45 % – питание;

25 % – одежда;

8 % – развлечение;

7 % – прочие нужды.

Представить данные в виде таблиц частот и относительных частот, а также построить столбчатую и круговую диаграммы распределения бюджета.

### Решение

1)

| Статья расхода  | Коммун. услуги | Питание | Одежда | Развлечения | Прочие нужды |
|-----------------|----------------|---------|--------|-------------|--------------|
| Расход, тыс. р. | 6              | 18      | 10     | 3,2         | 2,8          |

Проверяем:  $6 + 18 + 10 + 3,2 + 2,8 = 40$  (тыс. р.).

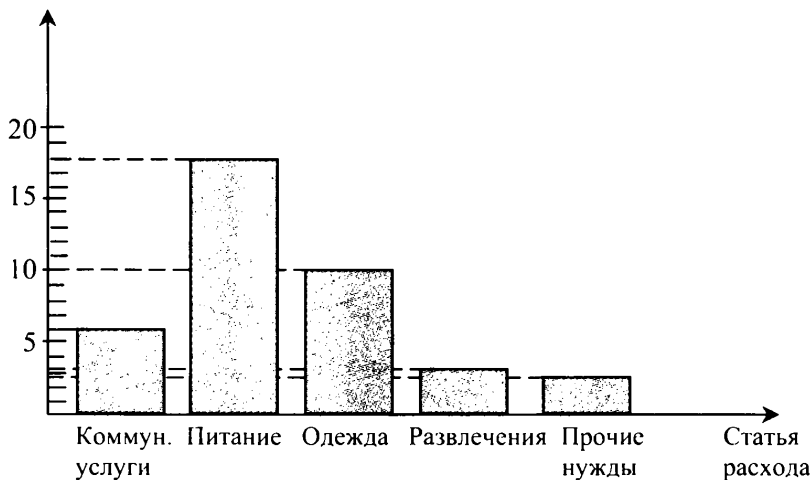
2)

| Статья расхода | Коммун. услуги | Питание | Одежда | Развлечения | Прочие нужды |
|----------------|----------------|---------|--------|-------------|--------------|
| Расход, %      | 15             | 45      | 25     | 8           | 7            |

Проверяем:  $15 + 45 + 25 + 8 + 7 = 100\%$ .

3)

Расход (тыс. р.)



4) Определяем величину соответствующих углов:

$$\frac{360^\circ \cdot 15\%}{100\%} = 54^\circ;$$

$$\frac{360^\circ \cdot 45\%}{100\%} = 162^\circ;$$

$$\frac{360^\circ \cdot 25\%}{100\%} = 90^\circ;$$

$$\frac{360^\circ \cdot 8\%}{100\%} \approx 29^\circ;$$

$$\frac{360^\circ \cdot 7\%}{100\%} \approx 25^\circ.$$



## V. Итоги урока.

– Какие способы наглядного представления статистической информации существуют?

– Как строится столбчатая диаграмма?

– Что показывает круговая диаграмма? Как вычисляется центральный угол каждого сектора?

– Как взаимосоответствуют таблица частот и таблица относительных частот диаграммам?

### Домашнее задание:

1. № 1044.

2. Постройте столбчатую диаграмму, показывающую распределение рабочих цеха по тарифным разрядам, которое представлено в следующей таблице:

|                 |   |   |    |    |   |   |
|-----------------|---|---|----|----|---|---|
| Тарифный разряд | 1 | 2 | 3  | 4  | 5 | 6 |
| Число рабочих   | 4 | 2 | 10 | 16 | 8 | 4 |

3. В таблице показано распределение сотрудников отдела по стажу работы:

|                          |              |    |    |    |              |
|--------------------------|--------------|----|----|----|--------------|
| Стаж работы, лет         | 3<br>и менее | 4  | 5  | 6  | 7<br>и более |
| Относительная частота, % | 8            | 12 | 16 | 24 | 40           |

Постройте круговую диаграмму, иллюстрирующую распределение сотрудников отдела по стажу работы.

## Урок 95

### ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ В ВИДЕ ПОЛИГОНА

**Цели:** рассмотреть возможности наглядного представления статистической информации в виде полигона; формировать умение строить полигон для иллюстрации динамики изменения статистических данных во времени.

#### Ход урока

**I. Организационный момент.**

**II. Проверочная работа.**

#### Вариант 1

В фермерском хозяйстве площади, отведенные под зерновые, распределены следующим образом: под пшеницу – 60 %, под овёс – 12 %, а остальное – под просо и гречиху, причём под



просо втрое больше, чем под гречиху. Постройте круговую диаграмму, характеризующую распределение площадей, отведённых под посевы зерновых в этом хозяйстве.

## Вариант 2

В фермерском хозяйстве площади, отведённые под зерновые, распределены следующим образом: под пшеницу – 50 %, под овёс – 17 %, а остальное – под просо и гречиху, причём под просо вдвое больше, чем под гречиху. Постройте круговую диаграмму, характеризующую распределение площадей, отведённых под посевы зерновых в этом хозяйстве.

### III. Объяснение нового материала.

Сообщение учащимся.

Динамику изменения статистических данных во времени часто иллюстрируют с помощью *полигона*. Для построения полигона отмечают в координатной плоскости точки, абсциссами которых служат моменты времени, а ординатами – соответствующие им статистические данные. Соединяя последовательно эти точки отрезками, получают ломаную, которую называют полигоном.

Рассматриваем пример на с. 223–224 учебника.

### IV. Формирование умений и навыков.

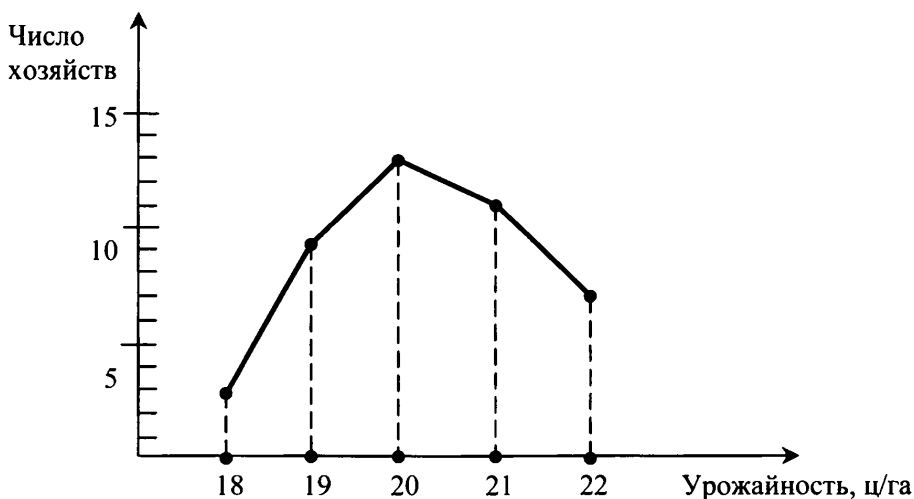
На этом уроке формируются умения строить полигоны для иллюстрации динамики изменения статистических данных и анализировать данные по готовым полигонам.

• № 1046, 1047.

При выполнении этих заданий отрабатывается умение строить полигоны по таблице частот и таблице относительных частот.

**№ 1046.**

|                   |    |    |    |    |    |
|-------------------|----|----|----|----|----|
| Урожайность, ц/га | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| Число хозяйств    | 3  | 9  | 13 | 11 | 7  |

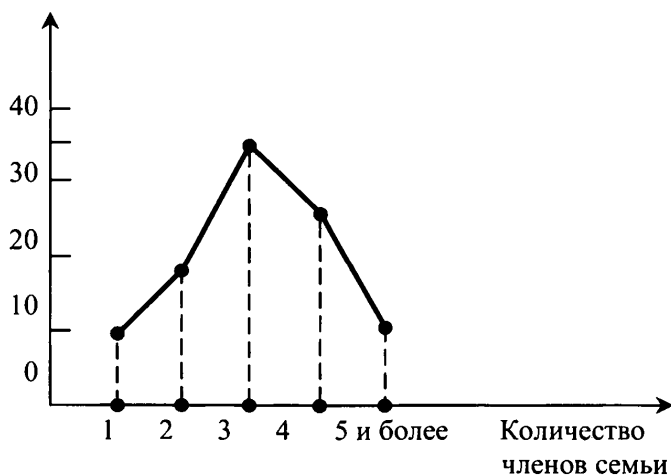


**№ 1047.**

|                          |    |    |    |    |           |
|--------------------------|----|----|----|----|-----------|
| Количество членов семьи  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5 и более |
| Относительная частота, % | 10 | 18 | 35 | 26 | 11        |

Полигон относительных частот можно строить, выражая значение по оси  $y$  (ординаты) как в процентах, так и в частях целого.

Относительная частота, %



**№ 1049** (устно).

а) Во втором и третьем кварталах 1992 г. производство растительного масла снижалось, достигнув в III квартале минимального уровня 120 тыс. т. За IV квартал 1992 г. производство выросло, почти достигнув уровня на начало 1992 г.

В первом квартале 1993 г. рост производства продолжался, достигнув максимального уровня 320 тыс. т. Во втором и третьем кварталах 1993 г. производство снижалось, а в IV квартале росло, превысив к концу 1993 г. уровень на конец 1992 г.

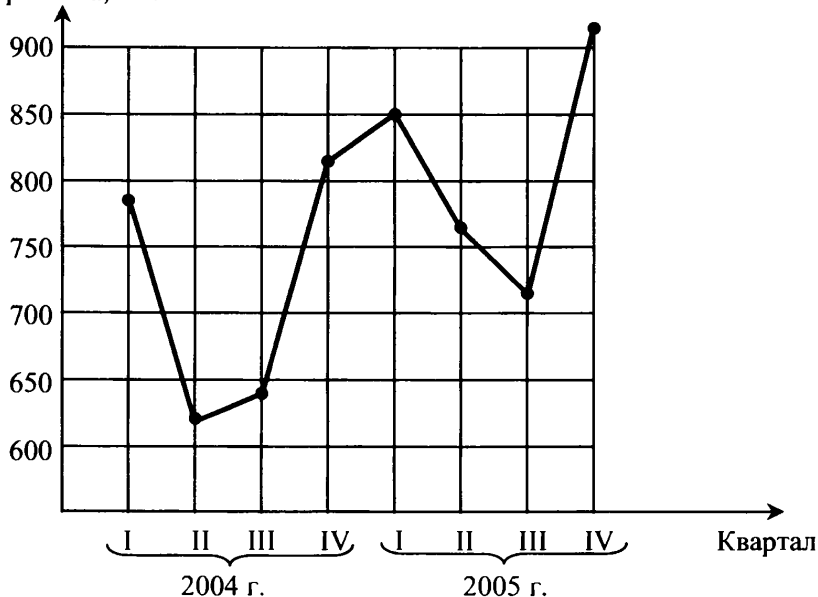
б) Наибольшее падение – во II и III кварталах 1992 г. (на 180 тыс. т).

в) Наибольший прирост – в IV квартале 1992 г. и I квартале 1993 г. (на 200 тыс. т).

О т в е т : а) II–III кв. 1992 г.; в) IV кв. 1992 – I кв. 1993 г.

**№ 1050.**

Выработка, шт.



а) За II квартал 2004 г. производство упало до минимального уровня 625 шт., затем в III–IV кварталах 2004 г. и I квартале 2005 г. – росло. Во II и III кварталах 2005 г. производство вновь снижалось, а в IV квартале 2005 г. быстро росло, достигнув максимального уровня 910 шт.

б) Наибольшее увеличение выработки (сразу за два последних квартала) произошло в III и IV кварталах 2004 г. (на 185 шт.).

Ответ: б) III–IV кв. 2004 г.

### V. Повторение изученного материала.

Для подготовки к контрольной работе предложить учащимся для решения следующие упражнения:

Упростить выражение:

а)  $0,8 \cdot a^{-6} \cdot b^4 \cdot 5a^{12}b^{-4}$ ;

б)  $3\frac{1}{2}m^{-8}n^{-7} : \left(-\frac{7}{8}m^{-5}n^{-7}\right)$ ;

в)  $\frac{21a^{-4}}{10b^6} \cdot \frac{5b^{-6}}{7a^{-8}}$ ;

г)  $\left(\frac{2x^4}{y^9}\right)^{-3} \cdot (x^{-2}y)^{-6}$ .

### Решение

а)  $0,8a^{-6}b^4 \cdot 5a^{12}b^{-4} = 0,8 \cdot 5 \cdot a^{-6+12} \cdot b^{4-4} = 4a^6$ .

б)  $3\frac{1}{2}m^{-8}n^{-7} : \left(-\frac{7}{8}m^{-5}n^{-7}\right) = \left(\frac{7}{2} : \left(-\frac{7}{8}\right)\right) \cdot (m^{-8} : m^{-5}) \cdot (n^{-7} : n^{-7}) = -4m^{-3}$ .

в)  $\frac{21a^{-4}}{10b^6} \cdot \frac{5b^{-6}}{7a^{-8}} = \frac{21 \cdot 5 \cdot a^{-4} \cdot b^{-6}}{10 \cdot 7 \cdot a^{-8} \cdot b^6} = \frac{3}{2}a^4b^{-12}$ .

г)  $\left(\frac{2x^4}{y^9}\right)^{-3} \cdot (x^{-2}y)^{-6} = \left(\frac{y^9}{2x^4}\right)^3 \cdot x^{12} \cdot y^{-6} = \frac{y^{27} \cdot x^{12} \cdot y^{-6}}{8 \cdot x^{12}} = \frac{1}{8}y^{21}$ .

### VI. Итоги урока.

– Какие способы наглядного представления статистической информации существуют?

– Что иллюстрирует полигон распределения данных? Как он строится?

Домашнее задание: № 1048, 1051, 1059, 1061.

## Урок 96

### ИЗОБРАЖЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ РЯДОВ ДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ ГИСТОГРАММЫ

**Цели:** рассмотреть возможности наглядного представления статистической информации в виде гистограммы; формировать умения строить гистограмму и анализировать динамику статистических данных по исходной гистограмме.

#### Ход урока

##### I. Организационный момент.

##### II. Устная работа.

На некотором маршруте метрополитена провели исследование пассажиропотока. Для этого каждый час в случайно выбранном вагоне электропоезда на протяжении всего пути считали число пассажиров разных возрастов. Результаты исследования представлены в следующей таблице:

| Время<br>Возраст | 6 ч<br>30 мин | 7 ч<br>30 мин | 8 ч<br>30 мин | 9 ч<br>30 мин | 10 ч<br>30 мин | 11 ч<br>30 мин |
|------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|
| До 7             | 1             | 3             | 5             | 13            | 16             | 11             |
| 7–18             | 12            | 16            | 35            | 38            | 26             | 12             |
| 18–30            | 15            | 25            | 38            | 35            | 17             | 15             |
| 30–45            | 27            | 67            | 93            | 78            | 66             | 30             |
| 45–65            | 5             | 13            | 29            | 22            | 22             | 20             |
| Старше 65        | 0             | 2             | 0             | 3             | 1              | 2              |

а) Определите час пик – время, когда в вагоне едет максимальное число людей.

б) Найдите время, когда относительная частота возрастной категории от 30 до 45 лет максимальна.

в) Какой процент пассажиров вагона, отправившегося в 11 ч 30 мин, составляют люди в возрасте от 18 до 65 лет?

## Решение

а) Чтобы определить час пик, найдём общее количество людей, едущих в вагоне, за каждый час.

| Время            | 6 ч<br>30 мин | 7 ч<br>30 мин | 8 ч<br>30 мин | 9 ч<br>30 мин | 10 ч<br>30 мин | 11 ч<br>30 мин |
|------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|
| Количество людей | 60            | 126           | 200           | 189           | 148            | 90             |

Из выборки видно, что час пик наступает в 8 ч 30 мин.

б) Сначала найдём относительную частоту указанной возрастной категории за каждый час. Для этого, воспользовавшись исходной таблицей и таблицей из пункта а), вычислим отношение людей данного возраста к общему числу людей в вагоне.

| Время  | 6 ч<br>30 мин | 7 ч<br>30 мин | 8 ч<br>30 мин | 9 ч<br>30 мин | 10 ч<br>30 мин | 11 ч<br>30 мин |
|--|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|
| Относительная частота числа людей 30–45 лет, % | 45 %          | 53 %          | 47 %          | 41 %          | 45 %           | 33 %           |

Таким образом, искомое время 7 ч 30 мин.

в) В вагоне, который отправляется в 11 ч 30 мин, находятся  $15 + 30 + 20 = 65$  пассажиров в возрасте от 18 до 65 лет.

Они составляют  $\frac{65}{90} \cdot 100\% \approx 72\%$  пассажиров вагона.

### III. Объяснение нового материала.

Сообщение учащимся.

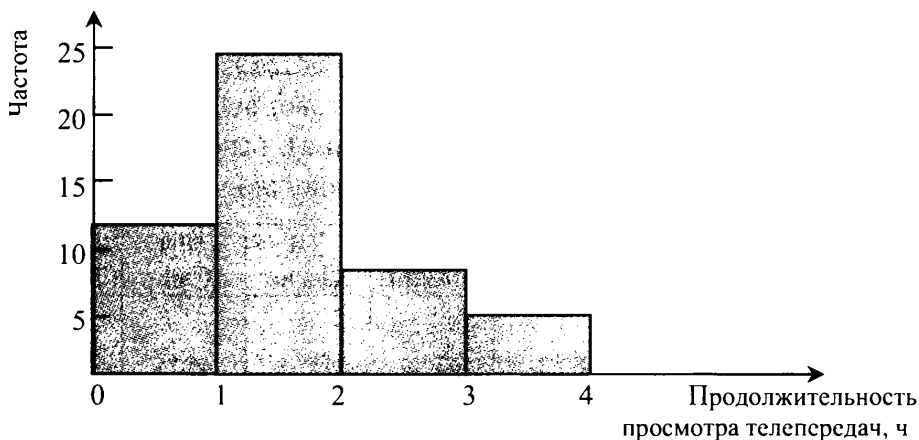
Интервальные ряды изображают с помощью гистограмм. Гистограмма представляет собой ступенчатую фигуру, составленную из сомкнутых прямоугольников. Основание каждого прямоугольника равно длине интервала, а высота – частоте или относительной частоте. Таким образом, в гистограмме, в отличие от обычной столбчатой диаграммы, основания прямоугольников выбираются не произвольно, они строго определены длиной интервала.

Рассматриваем пример построения гистограммы на с. 224–225 учебника.

#### IV. Формирование умений и навыков.

№ 1052.

| Время, ч | Частота |
|----------|---------|
| 0-1      | 12      |
| 1-2      | 24      |
| 2-3      | 8       |
| 3-4      | 5       |



№ 1054 (устно).

а) Рабочих в возрасте от 18 до 23 лет – 12 человек (высота первого столбика гистограммы).

б) Наибольшее число рабочих относится к возрастной группе от 33 до 38 лет (самый высокий столбик).

в) Общее число рабочих цеха находим как сумму высот всех столбиков диаграммы:

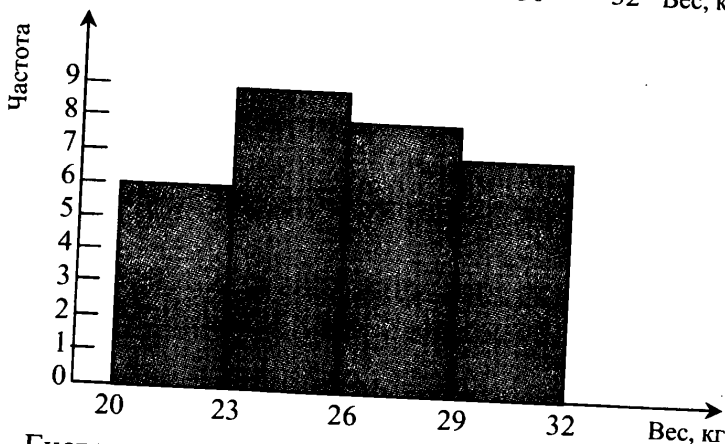
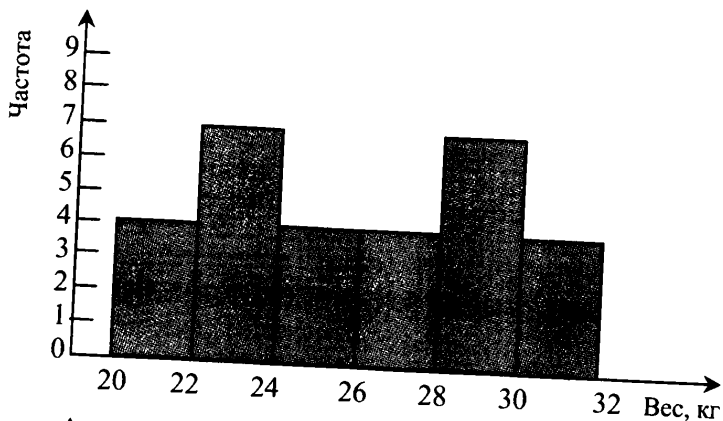
$$12 + 14 + 20 + 22 + 18 + 16 + 12 + 4 = 118 \text{ чел.}$$

Ответ: а) 17 чел.; б) 33–38 лет; в) 118 чел.

№ 1055.

| Вес, кг | Частота |
|---------|---------|
| 20-22   | 4       |
| 22-24   | 7       |
| 24-26   | 4       |
| 26-28   | 4       |
| 28-30   | 7       |
| 30-32   | 4       |

| Вес, кг | Частота |
|---------|---------|
| 20-23   | 6       |
| 23-26   | 9       |
| 26-29   | 8       |
| 29-32   | 7       |



Гистограммы имеют одинаковый диапазон значений по оси абсцисс (от 20 до 32 кг) и одинаковую сумму высот всех столбцов (30 для обеих гистограмм).

Гистограммы различаются количеством столбцов, их шириной и высотой.

### V. Проверочная работа.

#### Вариант 1

Имеются следующие данные о времени, которое токари цеха затрачивали на обработку одной детали:

|               |       |       |       |       |
|---------------|-------|-------|-------|-------|
| Время, мин    | 18-20 | 20-22 | 22-24 | 24-26 |
| Число токарей | 6     | 8     | 6     | 2     |

Пользуясь таблицей, постройте соответствующую гистограмму.



## Вариант 2

Имеются следующие данные о распределении участников похода по возрасту:

| Возраст, лет     | 16–22 | 22–28 | 28–34 | 34–42 |
|------------------|-------|-------|-------|-------|
| Число участников | 12    | 15    | 10    | 6     |

Пользуясь таблицей, постройте соответствующую гистограмму.

### VI. Итоги урока.

– Какие способы наглядного представления статистической информации вам известны?

– Объясните, в чём состоит каждый из этих способов.

– Что называется гистограммой?

– Как изображается на гистограмме общий объём исследуемой совокупности?

**Домашнее задание:** № 1053, 1056, 1087 (а, в), 1091.

## Урок 97

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 9

#### Вариант 1

1. Найдите значение выражения:

а)  $4^{11} \cdot 4^{-9}$ ;

б)  $6^{-5} : 6^{-3}$ ;

в)  $(2^{-2})^3$ .

2. Упростите выражение:

а)  $(x^{-3})^4 \cdot x^{14}$ ;

б)  $1,5a^2b^{-3} \cdot 4a^{-3}b^4$ .

3. Преобразуйте выражение:

а)  $\left(\frac{1}{3}x^{-1}y^2\right)^{-2}$ ;

б)  $\left(\frac{3x^{-1}}{4y^{-3}}\right)^{-1} \cdot 6xy^2$ .

4. Вычислите:  $\frac{3^{-9} \cdot 9^{-4}}{27^{-6}}$ .

5. Представьте произведение  $(4,6 \cdot 10^4) \cdot (2,5 \cdot 10^{-6})$  в стандартном виде числа.

6. Представьте выражение  $(a^{-1} + b^{-1})(a + b)^{-1}$  в виде рациональной дроби.

### Вариант 2

1. Найдите значение выражения:

а)  $5^{-4} \cdot 5^2$ ;

б)  $12^{-3} : 12^{-4}$ ;

в)  $(3^{-1})^{-3}$ .

2. Упростите выражение:

а)  $(a^{-5})^4 \cdot a^{22}$ ;

б)  $0,4x^6y^{-8} \cdot 50x^{-5}y^9$ .

3. Преобразуйте выражение:

а)  $\left(\frac{1}{6}x^{-4}y^3\right)^{-1}$ ;

б)  $\left(\frac{3a^{-4}}{2b^{-3}}\right)^{-2} \cdot 10a^7b^3$ .

4. Вычислите:  $\frac{2^{-6} \cdot 4^{-3}}{8^{-7}}$ .

5. Представьте произведение  $(3,5 \cdot 10^{-5}) \cdot (6,4 \cdot 10^2)$  в стандартном виде числа.

6. Представьте выражение  $(x^{-1} - y^{-1})(x - y)^{-1}$  в виде рациональной дроби.

### Вариант 3

1. Найдите значение выражения:

а)  $6^{15} \cdot 6^{-13}$ ;

б)  $4^{-6} : 4^{-3}$ ;

в)  $(5^{-1})^3$ .

2. Упростите выражение:

а)  $(x^{-2})^{-4} \cdot x^{-7}$ ;

б)  $1,2a^{-5}b^8 \cdot 5a^6b^{-6}$ .

3. Преобразуйте выражение:

а)  $\left(\frac{2}{3}a^{-4}b^{-2}\right)^{-2}$ ;

б)  $\left(\frac{5a^{-2}}{6b^{-1}}\right)^{-2} \cdot 10a^3b^4$ .

4. Вычислите:  $\frac{5^{-9} \cdot 25^{-2}}{125^{-4}}$ .

5. Представьте произведение  $(6,8 \cdot 10^6) \cdot (4,5 \cdot 10^{-8})$  в стандартном виде числа.

6. Представьте выражение  $(a^{-1} + b)(a + b^{-1})^{-1}$  в виде рациональной дроби.

## Вариант 4

1. Найдите значение выражения:

а)  $5^{21} \cdot 5^{-23}$ ;      б)  $3^{-8} : 3^9$ ;      в)  $(2^2)^{-3}$ .

2. Упростите выражение:

а)  $(a^{-3})^5 \cdot a^{18}$ ;      б)  $2,4x^{-8}y^5 \cdot 5x^9y^{-7}$ .

3. Преобразуйте выражение:

а)  $\left(\frac{1}{4}x^{-2}y^{-3}\right)^{-2}$ ;      б)  $\left(\frac{5x^{-1}}{3y^{-2}}\right)^{-2} \cdot 15x^3y$ .

4. Вычислите:  $\frac{4^{-6} \cdot 16^{-3}}{64^{-5}}$ .

5. Представьте произведение  $(2,5 \cdot 10^7) \cdot (6,2 \cdot 10^{-10})$  в стандартном виде числа.

6. Представьте выражение  $(x^{-1} - y)(x - y^{-1})^{-1}$  в виде рациональной дроби.

Рекомендации по оцениванию:

Задания 1 и 2 соответствуют уровню обязательной подготовки учащихся.

Для получения отметки «3» достаточно выполнить любые 2 задания. Для получения отметки «5» необходимо решить любые 5 заданий.

## РЕШЕНИЕ ВАРИАНТОВ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

### Вариант 1

1. а)  $4^{11} \cdot 4^{-9} = 4^{11-9} = 4^2 = 16$ ;

б)  $6^{-5} : 6^{-3} = 6^{-5+3} = 6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$ ;

в)  $(2^{-2})^3 = 2^{-2 \cdot 3} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$ .

Ответ: а) 16; б)  $\frac{1}{36}$ ; в)  $\frac{1}{64}$ .

2. а)  $(x^{-3})^4 \cdot x^{14} = x^{-12} \cdot x^{14} = x^{-12+14} = x^2$ ;

$$6) 1,5a^2b^{-3} \cdot 4a^{-3}b^4 = (1,5 \cdot 4) \cdot (a^2 \cdot a^{-3}) \cdot (b^{-3} \cdot b^4) = 6a^{-1}b = \frac{6b}{a}.$$

ОТВЕТ: а)  $x^2$ ; б)  $\frac{6b}{a}$ .

$$3. \text{ а) } \left(\frac{1}{3}x^{-1}y^2\right)^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot (x^{-1})^{-2} \cdot (y^2)^{-2} = 3^2 \cdot x^2 \cdot y^{-4} = \frac{9x^2}{y^4}.$$

$$\text{б) } \left(\frac{3x^{-1}}{4y^{-3}}\right)^{-1} \cdot 6xy^2 = \frac{4y^{-3}}{3x^{-1}} \cdot 6xy^2 = \frac{4 \cdot 6 \cdot x \cdot y^{-3} \cdot y^2}{3x^{-1}} = \frac{8x^2}{y}.$$

ОТВЕТ: а)  $\frac{9x^2}{y^4}$ ; б)  $\frac{8x^2}{y}$ .

$$4. \frac{3^{-9} \cdot 9^{-4}}{27^{-6}} = 3^{-9} \cdot (3^2)^{-4} \cdot 27^6 = 3^{-9} \cdot 3^{-8} \cdot 3^{18} = 3.$$

ОТВЕТ: 3.

$$5. (4,6 \cdot 10^4) \cdot (2,5 \cdot 10^{-6}) = 4,6 \cdot 2,5 \cdot 10^{4-6} = 11,5 \cdot 10^{-2} = 1,15 \cdot 10 \cdot 10^{-2} = 1,15 \cdot 10^{-1}.$$

ОТВЕТ:  $1,15 \cdot 10^{-1}$ .

$$6. (a^{-1} + b^{-1})(a+b)^{-1} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{1}{(a+b)} = \frac{(a+b)}{ab} \cdot \frac{1}{(a+b)} = \frac{1}{ab}.$$

ОТВЕТ:  $\frac{1}{ab}$ .

### Вариант 2

$$1. \text{ а) } 5^{-4} \cdot 5^2 = 5^{-4+2} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0,04;$$

$$\text{б) } 12^{-3} : 12^{-4} = 12^{-3+4} = 12;$$

$$\text{в) } (3^{-1})^{-3} = 3^{(-1) \cdot (-3)} = 3^3 = 27.$$

ОТВЕТ: а) 0,04; б) 12; в) 27.

$$2. \text{ а) } (a^{-5})^4 \cdot a^{22} = a^{-20} \cdot a^{22} = a^{-20+22} = a^2;$$

$$\text{б) } 0,4x^6y^{-8} \cdot 50x^{-5}y^9 = (0,4 \cdot 50) \cdot (x^6 \cdot x^{-5}) \cdot (y^{-8} \cdot y^9) = 20xy.$$

ОТВЕТ: а)  $a^2$ ; б)  $20xy$ .

$$3. \text{ а) } \left(\frac{1}{6}x^{-4}y^3\right)^{-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} \cdot (x^{-4})^{-1} \cdot (y^3)^{-1} = 6x^4y^{-3} = \frac{6x^4}{y^3};$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \left(\frac{3a^{-4}}{2b^{-3}}\right)^{-2} \cdot 10a^7b^3 &= \left(\frac{2b^{-3}}{3a^{-4}}\right)^2 \cdot 10a^7b^3 = \frac{4b^{-6} \cdot 10a^7b^3}{9a^{-8}} = \\ &= \frac{40}{9} \cdot a^{7+8} \cdot b^{-6+3} = \frac{40}{9}a^{15} \cdot b^{-3} = \frac{40a^{15}}{9b^3}. \end{aligned}$$

ОТВЕТ: а)  $\frac{6x^4}{y^3}$ ; б)  $\frac{40a^{15}}{9b^3}$ .

$$4. \frac{2^{-6} \cdot 4^{-3}}{8^{-7}} = 2^{-6} \cdot (2^2)^{-3} \cdot (2^3)^7 = 2^{-6} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{21} = 2^{-6-6+21} = \\ = 2^9 = 512.$$

ОТВЕТ: 512.

$$5. (3,5 \cdot 10^{-5}) \cdot (6,4 \cdot 10^2) = 3,5 \cdot 6,4 \cdot 10^{-5+2} = 22,4 \cdot 10^{-3} = \\ = 2,24 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 2,24 \cdot 10^{-2}.$$

ОТВЕТ:  $2,24 \cdot 10^{-2}$ .

$$6. (x^{-1} - y^{-1})(x - y)^{-1} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{(x - y)} = \frac{(y - x)}{xy} \cdot \frac{1}{(x - y)} = \\ = -\frac{1}{xy}.$$

ОТВЕТ:  $-\frac{1}{xy}$ .

### Вариант 3

$$1. \text{ а) } 6^{15} \cdot 6^{-13} = 6^{15-13} = 6^2 = 36;$$

$$\text{б) } 4^{-6} : 4^{-3} = 4^{-6+3} = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64};$$

$$\text{в) } (5^{-1})^3 = 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}.$$

ОТВЕТ: а) 36; б)  $\frac{1}{64}$ ; в)  $\frac{1}{125}$ .

$$2. \text{ а) } (x^{-2})^{-4} \cdot x^{-7} = x^{(-2) \cdot (-4)} \cdot x^{-7} = x^8 \cdot x^{-7} = x;$$

$$\text{б) } 1,2a^{-5}b^8 \cdot 5a^6b^{-6} = (1,2 \cdot 5) \cdot (a^{-5} \cdot a^6) \cdot (b^8 \cdot b^{-6}) = 6ab^2.$$

ОТВЕТ: а)  $x$ ; б)  $6ab^2$ .

$$3. \text{ а) } \left(\frac{2}{3}a^{-4}b^{-2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot (a^{-4})^{-2} \cdot (b^{-2})^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot a^8 \cdot b^4 = \\ = \frac{9}{4}a^8b^4;$$

$$\text{б) } \left(\frac{5a^{-2}}{6b^{-1}}\right)^{-2} \cdot 10a^3b^4 = \left(\frac{6b^{-1}}{5a^{-2}}\right)^2 \cdot 10a^3b^4 = \frac{36b^{-2}}{25a^{-4}} \cdot 10a^3b^4 = \\ = \frac{36 \cdot 10 \cdot a^3 \cdot b^{-2} \cdot b^4}{25a^{-4}} = \frac{72}{5} \cdot a^7b^2 = \frac{72a^7b^2}{5}.$$

ОТВЕТ: а)  $\frac{9}{4}a^8b^4$ ; б)  $\frac{72a^7b^2}{5}$ .

$$4. \frac{5^{-9} \cdot 25^{-2}}{125^{-4}} = 5^{-9} \cdot (5^2)^{-2} \cdot (5^3)^4 = 5^{-9} \cdot 5^{-4} \cdot 5^{12} = 5^{-9-4+12} = 5^{-1} = \\ = \frac{1}{5} = 0,2.$$

ОТВЕТ: 0,2.

$$5. (6,8 \cdot 10^6) \cdot (4,5 \cdot 10^{-8}) = (6,8 \cdot 4,5) \cdot 10^{6-8} = 30,6 \cdot 10^{-2} = \\ = 3,06 \cdot 10 \cdot 10^{-2} = 3,06 \cdot 10^{-1}.$$

ОТВЕТ:  $3,06 \cdot 10^{-1}$ .

$$6. (a^{-1} + b)(a + b^{-1})^{-1} = \left(\frac{1}{a} + b\right) \cdot \frac{1}{a + \frac{1}{b}} = \frac{1+ab}{a} \cdot \frac{1}{\frac{ab+1}{b}} = \\ = \frac{1+ab}{a} \cdot \frac{b}{1+ab} = \frac{b}{a}.$$

ОТВЕТ:  $\frac{b}{a}$

### Вариант 4

1. а)  $5^{21} \cdot 5^{-23} = 5^{21-23} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0,04$ ;

б)  $3^{-8} : 3^{-9} = 3^{-8+9} = 3$ ;

в)  $(2^2)^{-3} = 2^{2 \cdot (-3)} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$ .

ОТВЕТ: а) 0,04; б) 3; в)  $\frac{1}{64}$ .

2. а)  $(a^{-3})^5 \cdot a^{18} = a^{(-3) \cdot 5} \cdot a^{18} = a^{-15} \cdot a^{18} = a^3$ ;

б)  $2,4x^{-8}y^5 \cdot 5x^9y^{-7} = (2,4 \cdot 5) \cdot (x^{-8} \cdot x^9) \cdot (y^5 \cdot y^{-7}) = 12xy^{-2} =$   
 $= \frac{12x}{y^2}$ .

ОТВЕТ: а)  $a^3$ ; б)  $\frac{12x}{y^2}$ .

3. а)  $\left(\frac{1}{4}x^{-2}y^{-3}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot (x^{-2})^{-2} \cdot (y^{-3})^{-2} = 4^2 \cdot x^4 \cdot y^6 =$   
 $= 16x^4y^6$ ;

б)  $\left(\frac{5x^{-1}}{3y^{-2}}\right)^{-2} \cdot 15x^3y = \left(\frac{3y^{-2}}{5x^{-1}}\right)^2 \cdot 15x^3y = \frac{9y^{-4}}{25x^{-2}} \cdot 15x^3y =$   
 $= \frac{9 \cdot 15 \cdot x^3 \cdot y^{-4} \cdot y}{25 \cdot x^{-2}} = \frac{27}{5} \cdot x^5 \cdot y^{-3} = \frac{27x^5}{5y^3}$ .

ОТВЕТ: а)  $16x^4y^6$ ; б)  $\frac{27x^5}{5y^3}$ .

4.  $\frac{4^{-6} \cdot 16^{-3}}{64^{-5}} = 4^{-6} \cdot (4^2)^{-3} \cdot (4^3)^5 = 4^{-6} \cdot 4^{-6} \cdot 4^{15} = 4^{-6+6+15} =$   
 $= 4^3 = 64$ .

ОТВЕТ: 64.

$$5. (2,5 \cdot 10^7) \cdot (6,2 \cdot 10^{-10}) = (2,5 \cdot 6,2) \cdot 10^{7-10} = 15,5 \cdot 10^{-3} = \\ = 1,55 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 1,55 \cdot 10^{-2}.$$

Ответ:  $1,55 \cdot 10^{-2}$ .

$$6. (x^{-1} - y)(x - y^{-1})^{-1} = \left(\frac{1}{x} - y\right) \cdot \frac{1}{\left(x - \frac{1}{y}\right)} = \frac{1 - xy}{x} \cdot \frac{1}{\frac{xy - 1}{y}} = \\ = -\frac{xy - 1}{x} \cdot \frac{y}{xy - 1} = -\frac{y}{x}.$$

Ответ:  $-\frac{y}{x}$ .

## Урок 98

### ФУНКЦИИ $y = x^{-1}$ И $y = x^{-2}$ И ИХ СВОЙСТВА

**Цели:** рассмотреть функции  $y = x^{-1}$  и  $y = x^{-2}$ , изучить их свойства; формировать умения строить графики данных функций, решать задачи с их использованием.

#### Ход урока

##### I. Актуализация знаний.

Повторить свойства изученных ранее функций:

- $y = kx$  и частный случай  $y = x$  при  $k = 1$ .
- $y = x^n$ , где  $n$  – натуральное число, в частности,  $y = x^2$  и  $y = x^3$  (знакомы из курса алгебры 7 класса).

- $y = \frac{k}{x}$  и частный случай  $y = \frac{1}{x}$  при  $k = 1$ .

##### II. Объяснение нового материала.

- Замечаем, что  $\frac{1}{x} = x^{-1}$ , и перечисляем свойства функции  $y = x^{-1}$ :

- Если  $x > 0$ , то  $y > 0$ ;  
Если  $x < 0$ , то  $y < 0$ .

Графиком функции является гипербола, расположенная в 1-й и 3-й четвертях координатной плоскости.



2) Противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции; график функции  $y = x^{-1}$  симметричен относительно начала координат.

3) Если значения аргумента при  $x > 0$  неограниченно возрастают ( $x \rightarrow \infty$ ), то соответствующие им значения функции убывают ( $y \rightarrow 0$ ). Если значения аргумента при  $x > 0$  убывают, то есть стремятся к нулю ( $x \rightarrow 0$ ), то соответствующие значения функции неограниченно возрастают ( $y \rightarrow \infty$ ).

Можно предложить учащимся самостоятельно сделать аналогичные выводы для  $x < 0$ .

4) Значения аргумента и соответствующие им значения функции являются взаимно обратными числами.

2. Замечаем, что  $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ , и перечисляем свойства функции  $y = x^{-2}$ :

1) При любом значении аргумента значения функции – положительные числа.

2) Любым противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции; график функции  $y = x^{-2}$  симметричен относительно оси  $y$ .

3) Если  $x \rightarrow +\infty$  или  $x \rightarrow -\infty$ , то  $y \rightarrow 0$ ;  
если  $x \rightarrow 0$ , то  $y \rightarrow +\infty$ .

4) График функции состоит из двух ветвей (плавных кривых), расположенных в 1-й и 2-й четвертях координатной плоскости. Для его построения необходимо взять несколько значений  $x > 0$ , причём как  $0 < x < 1$ , так и  $x \geq 1$ , и вычислить соответствующие значения функции. Построив одну ветвь графика, вторую получаем отображением её относительно оси  $y$ .

### III. Формирование умений и навыков.

#### № 1062.

$$y = x^{-1};$$

$$\frac{1}{247} = a^{-1}; \quad \frac{1}{247} = \frac{1}{a}; \quad a = 247.$$

$$b = 843^{-1}; \quad b = \frac{1}{843}$$

Ответ:  $a = 247; \quad b = \frac{1}{843}$ .

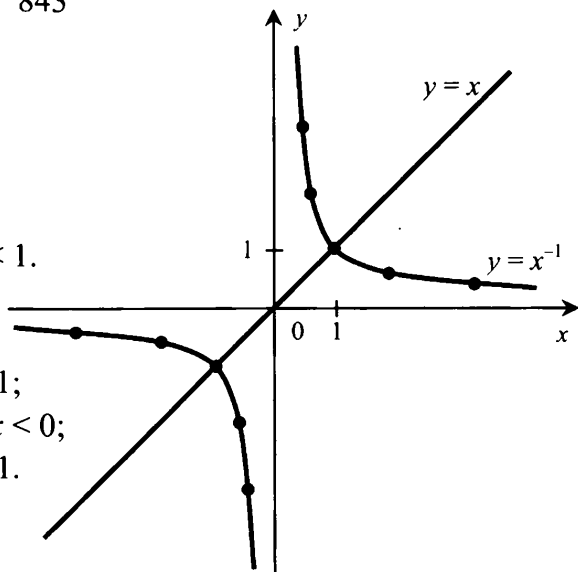
**№ 1063.**

а) Для  $x > 0$ :

$$x = x^{-1}, \text{ если } x = 1;$$

$$x > x^{-1}, \text{ если } x > 1;$$

$$x < x^{-1}, \text{ если } 0 < x < 1.$$



б) Для  $x < 0$ :

$$x = x^{-1}, \text{ если } x = -1;$$

$$x > x^{-1}, \text{ если } -1 < x < 0;$$

$$x < x^{-1}, \text{ если } x < -1.$$

**№ 1064.**

$$y = -x + l, \quad l > 0 \text{ и } y = x^{-1}.$$

Определим общие точки графиков, решив уравнение:

$$-x + l = x^{-1}; \quad -x + l = \frac{1}{x}; \quad -x + l - \frac{1}{x} = 0; \quad \frac{-x^2 + lx - 1}{x} = 0;$$

$$-x^2 + lx - 1 = 0, \text{ при } x \neq 0.$$

$x^2 - lx + 1 = 0$  – уравнение с параметром  $l$ .

$$D = (-l)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = l^2 - 4.$$

1) Уравнение имеет 2 корня, если  $D > 0$  (графики имеют две общие точки).

$$D > 0, \text{ если } l^2 - 4 > 0; \quad l^2 > 4, \text{ по свойству неравенств, } l > 2.$$

2) Уравнение имеет 1 корень, если  $D = 0$  (графики имеют одну общую точку).

$$D = 0, \text{ если } l^2 - 4 = 0; \quad l^2 = 4, \quad l = 2 \text{ (так как } l > 0).$$

3) Уравнение не имеет корней, если  $D < 0$  (графики не имеют общих точек).

$$D < 0, \text{ если } l^2 - 4 < 0, \quad l^2 < 4, \text{ по свойству неравенств } l < 2.$$

**№ 1068.**

$$y = x^{-2};$$

$$\frac{1}{2601} = a^{-2}; \quad \frac{1}{2601} = \frac{1}{a^2}; \quad a^2 = 2601; \quad a = 51 \text{ или } a = -51;$$

$$b = (0,0625)^{-2}; \quad b = \left(\frac{1}{16}\right)^{-2}; \quad b = 16^2; \quad b = 256.$$

Ответ:  $a = \pm 51; b = 256.$

**№1069.**

а)  $0 < x_0 < 1$  /  $\cdot x_0$  (знаки не меняются);

$$0 < x_0^2 < x_0.$$

$0 < x_0 < 1$  /  $:$   $x_0$  (знаки не меняются);

$$0 < 1 < \frac{1}{x_0}; \quad /: x_0 \text{ (знаки не меняются);}$$

$$0 < \frac{1}{x_0} < \frac{1}{x_0^2}; \quad 0 < x_0^{-1} < x_0^{-2}.$$

Имеем:  $x_0^{-2} > x_0^{-1}$ ;  $x_0^{-1} > x_0^0$ ;  $x_0^0 > x_0$ ;  $x_0 > x_0^2$ , значит, в порядке возрастания числа будут располагаться так:

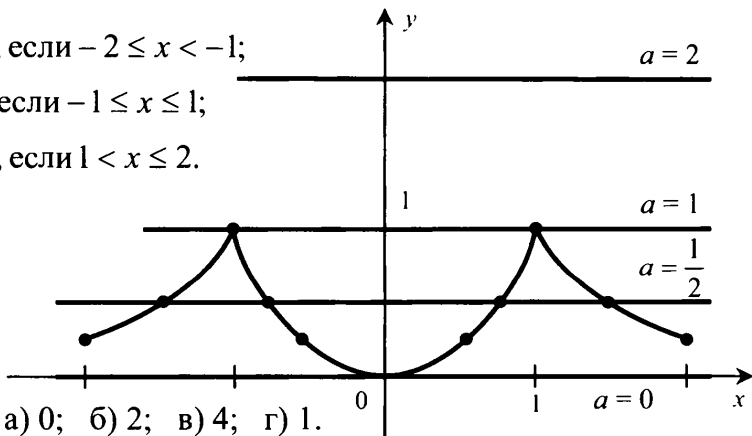
$$x_0^2; \quad x_0; \quad x_0^0; \quad x_0^{-1}; \quad x_0^{-2}.$$

б) Аналогично докажем, что при  $x_0 > 1$  в порядке возрастания числа будут располагаться так:

$$x_0^{-2}; \quad x_0^{-1}; \quad x_0^0; \quad x_0; \quad x_0^2.$$

**№ 1070.**

$$y = \begin{cases} x^{-2}, & \text{если } -2 \leq x < -1; \\ x^2, & \text{если } -1 \leq x \leq 1; \\ x^{-2}, & \text{если } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$



Ответ: а) 0; б) 2; в) 4; г) 1.

## № 1071.

Выполняем построение, аналогичное номеру 1070. Можно предложить выполнить дополнительное задание: определить, сколько корней имеет уравнение  $y = a?$  ( $a$  – параметр).

## Уроки 99–101

### ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ

Задания для итогового повторения курса алгебры 8 класса можно найти в дидактических материалах к учебнику.

## Урок 102

### ИТОГОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

#### Вариант 1

1. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 3(x-1) - 2(1+x) < 1, \\ 3x - 4 > 0. \end{cases}$$

2. Упростите выражение  $(\sqrt{6} + \sqrt{3})\sqrt{12} - 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}$ .

3. Упростите выражение:  $\left(\frac{6}{y^2-9} + \frac{1}{3-y}\right) \cdot \frac{y^2+6y+9}{5}$ .

4. Два автомобиля выезжают одновременно из одного города в другой, находящийся на расстоянии 560 км. Скорость первого автомобиля на 10 км/ч больше скорости второго, и поэтому первый приезжает на место на 1 ч раньше второго. Определите скорость каждого автомобиля.

5. При каких значениях  $x$  функция  $y = -\frac{x-8}{4} + 1$  принимает положительные значения?

#### Вариант 2

1. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 5(2x-1) - 3(3x+6) < 2, \\ 2x - 17 > 0. \end{cases}$$

2. Упростите выражение:  $(\sqrt{10} + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{20} - 5\sqrt{8}$ .

3. Упростите выражение:  $\left(\frac{2}{x^2 - 4} + \frac{1}{2x - x^2}\right) : \frac{1}{x^2 + 4x + 4}$ .

4. Пассажирский поезд был задержан в пути на 16 мин и нагнал опоздание на перегоне в 80 км, идя со скоростью, на 10 км/ч большей, чем полагалось по расписанию. Какова была скорость поезда по расписанию?

5. При каких значениях  $x$  функция  $y = \frac{6-x}{5} - 2$  принимает отрицательные значения?

### Вариант 3

1. Решите неравенство:  $4(2x - 1) - 3(3x + 2) > 1$ .

2. Упростите выражение:  $(\sqrt{15} + \sqrt{5})\sqrt{15} - \frac{5}{3}\sqrt{27}$ .

3. Упростите выражение:  $\left(\frac{3}{9-x^2} + \frac{1}{x-3}\right) : \frac{x}{x^2 - 6x + 9}$ .

4. «Ракета» на подводных крыльях имеет скорость, на 50 км/ч большую, чем скорость теплохода, и поэтому путь в 210 км она прошла на 7 ч 30 мин скорее, чем теплоход. Найдите скорость «Ракеты».

5. При каких значениях  $x$  функция  $y = \frac{x-3}{3} + 4$  принимает отрицательные значения?

### Вариант 4

1. Решите неравенство:  $9(x - 2) - 3(2x + 1) > 5x$ .

2. Упростите выражение:  $(\sqrt{18} + \sqrt{3})\sqrt{2} - 0,5\sqrt{24}$ .

3. Упростите выражение:  $\left(\frac{4}{x^2 - 4} + \frac{1}{2-x}\right) \cdot \frac{x^2 + 4x + 4}{3}$ .

4. Из пункта  $A$  отправили по течению реки плот. Через 5 ч 20 мин вслед за ним вышла из пункта  $A$  моторная лодка, которая догнала плот на расстоянии 20 км от пункта  $A$ . С какой скоростью двигался плот, если известно, что моторная лодка шла быстрее него на 12 км/ч?

5. При каких значениях  $x$  функция  $y = \frac{12-x}{6} + 1$  принимает положительные значения?

### РЕШЕНИЕ ВАРИАНТОВ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

#### Вариант 1

$$1. \begin{cases} 3(x-1) - 2(1+x) < 1, \\ 3x - 4 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3 - 2 - 2x < 1, \\ 3x > 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 < 1, \\ 3x > 4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 6, \\ x > \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Ответ:  $\left(1\frac{1}{3}; 6\right)$ .

$$2. (\sqrt{6} + \sqrt{3})\sqrt{12} - 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6 \cdot 12} + \sqrt{3 \cdot 12} - 2\sqrt{6 \cdot 3} = \\ = \sqrt{6 \cdot 6 \cdot 2} + \sqrt{36} - 2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 3} = 6\sqrt{2} + 6 - 6\sqrt{2} = 6.$$

$$3. 1) \frac{6}{y^2 - 9} + \frac{1}{3 - y} = \frac{6}{(y-3)(y+3)} - \frac{1}{y-3} = \frac{6 - y - 3}{(y-3)(y+3)} = \\ = \frac{3 - y}{(y-3)(y+3)} = -\frac{1}{y+3};$$

$$2) -\frac{1}{y+3} \cdot \frac{y^2 + 6y + 9}{5} = -\frac{1}{y+3} \cdot \frac{(y+3)^2}{5} = -\frac{y+3}{5}.$$

Ответ:  $-\frac{y+3}{5}$ .

4. Пусть скорость первого автомобиля  $x$  км/ч, тогда скорость второго автомобиля  $(x - 10)$  км/ч.

Время, затраченное первым автомобилем на прохождение пути в 560 км, равно  $\frac{560}{x}$  ч, а время, затраченное вторым авто-

мобилем на прохождение этого же пути, равно  $\frac{560}{x-10}$  ч.

Первый автомобиль приезжает на место на 1 ч раньше второго. Получим уравнение:

$$\frac{560}{x-10} - \frac{560}{x} = 1.$$

Решим это уравнение:

$$560x - 560(x-10) = x(x-10)$$

$$560x - 560x + 5600 = x^2 - 10x$$

$$x^2 - 10x - 5600 = 0$$

$$x_1 = -70 \text{ (не подходит по смыслу задачи)}$$

$$x_2 = 80$$

Получим, что скорость первого автомобиля равна 80 км/ч, а скорость второго 70 км/ч.

Ответ: 80 км/ч и 70 км/ч.

5. Чтобы узнать все значения  $x$ , при которых функция  $y = -\frac{x-8}{4} + 1$  принимает положительные значения, нужно решить неравенство:  $-\frac{x-8}{4} + 1 > 0$ .

$$\text{решить неравенство: } -\frac{x-8}{4} + 1 > 0.$$

$$\frac{8-x}{4} > -1$$

$$8-x > -4$$

$$-x > -12$$

$$x < 12$$

Ответ: при  $x < 12$ .

### Вариант 2

$$1. \begin{cases} 5(2x-1) - 3(3x+6) < 2, \\ 2x-17 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x-5-9x-18 < 2, \\ 2x > 17; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-23 < 2, \\ 2x > 17; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 25, \\ x > 8,5. \end{cases}$$

Ответ: (8,5; 25).

$$2. (\sqrt{10} + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{20} - 5\sqrt{8} = \sqrt{10 \cdot 20} + \sqrt{5 \cdot 20} - 5\sqrt{4 \cdot 2} = \\ = \sqrt{10 \cdot 10 \cdot 2} + \sqrt{5 \cdot 5 \cdot 4} - 10\sqrt{2} = 10\sqrt{2} + 10 - 10\sqrt{2} = 10.$$

$$3. 1) \frac{2}{x^2 - 4} + \frac{1}{2x - x^2} = \frac{2}{(x-2)(x+2)} + \frac{1}{x(2-x)} = \\ = \frac{2}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x(x-2)} = \frac{2x - x - 2}{x(x-2)(x+2)} = \\ = \frac{x-2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x(x+2)}.$$

$$2) \frac{1}{x(x+2)} : \frac{1}{x^2 + 4x + 4} = \frac{1 \cdot (x+2)^2}{x(x+2) \cdot 1} = \frac{x+2}{x}.$$

Ответ:  $\frac{x+2}{x}$ .

4. Пусть  $x$  км/ч – скорость поезда по расписанию, тогда  $(x + 10)$  км/ч – его скорость на перегоне в 80 км. Если бы на перегоне в 80 км поезд шёл по расписанию, то он затратил бы на это  $\frac{80}{x}$  ч. В реальности этот перегон он преодолел за  $\frac{80}{x+10}$  ч.

Отрезок пути, равный 80 км, поезд в реальности прошёл на 16 мин (или  $\frac{4}{15}$  ч) быстрее, чем предполагал по расписанию.

Получим уравнение:

$$\frac{80}{x} - \frac{80}{x+10} = \frac{4}{15}.$$

Решим это уравнение:

$$15 \cdot 80(x+10) - 15 \cdot 80x = 4x(x+10)$$

$$15 \cdot 80x + 15 \cdot 80 \cdot 10 - 15 \cdot 80x = 4x^2 + 40x$$

$$4x^2 + 40x - 15 \cdot 80 \cdot 10 = 0$$

$$x^2 + 10x - 3000 = 0$$

$$x_1 = -60 \text{ (не подходит по смыслу задачи)}$$

$$x_2 = 50$$

Ответ: 50 км/ч.



$$5. \frac{6-x}{5} - 2 < 0$$

$$6-x-10 < 0$$

$$-x < 4$$

$$x > -4$$

Ответ:  $x > -4$ .

### Вариант 3

$$1. 4(2x-1) - 3(3x+2) > 1$$

$$8x - 4 - 9x - 6 > 1$$

$$-x > 11$$

$$x < -11.$$

Ответ:  $(-\infty; -11)$ .

$$2. (\sqrt{15} + \sqrt{5})\sqrt{15} - \frac{5}{3}\sqrt{27} = \sqrt{15} \cdot \sqrt{15} + \sqrt{5 \cdot 15} - \frac{5}{3}\sqrt{9 \cdot 3} =$$

$$= 15 + \sqrt{5 \cdot 5 \cdot 3} - \frac{5}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 15 + 5\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 15.$$

$$3. 1) \frac{3}{9-x^2} + \frac{1}{x-3} = \frac{3}{(3-x)(3+x)} - \frac{1}{3-x} = \frac{3-3-x}{(3-x)(3+x)} =$$

$$= \frac{-x}{(3-x)(3+x)} = \frac{x}{(x-3)(x+3)};$$

$$2) \frac{x}{(x-3)(x+3)} : \frac{x}{x^2-6x+9} = \frac{x \cdot (x-3)^2}{(x-3)(x+3) \cdot x} = \frac{x-3}{x+3}.$$

Ответ:  $\frac{x-3}{x+3}$ .

4. Пусть скорость «Ракеты»  $x$  км/ч, тогда скорость теплохода  $(x-50)$  км/ч. Путь в 210 км «Ракета» проходит за  $\frac{210}{x}$  ч, а теплоход – за  $\frac{210}{x-50}$  ч. По условию этот путь «Ракета» проходит быстрее теплохода на 7,5 ч.

Получим уравнение:  $\frac{210}{x-50} - \frac{210}{x} = 7,5$ .

Решим это уравнение:

$$210x - 210(x - 50) = 7,5x(x - 50)$$

$$210x - 210x + 210 \cdot 50 = 7,5x^2 - 7,5 \cdot 50x$$

$$7,5x^2 - 7,5 \cdot 50x - 210 \cdot 50 = 0$$

$$15x^2 - 15 \cdot 50x - 210 \cdot 100 = 0$$

$$x^2 - 50x - 1400 = 0$$

$$x_1 = -20 \text{ (не подходит по смыслу задачи).}$$

$$x_2 = 70$$

Ответ: 70 км/ч.

$$5. \frac{x-3}{3} + 4 < 0$$

$$x - 3 + 12 < 0$$

$$x < -9$$

Ответ:  $x < -9$ .

#### Вариант 4

$$1. 9(x-2) - 3(2x+1) > 5x$$

$$9x - 18 - 6x - 3 > 5x$$

$$3x - 5x > 21$$

$$-2x > 21$$

$$x < -10,5$$

Ответ:  $(-\infty; -10,5)$ .

$$2. (\sqrt{18} + \sqrt{3})\sqrt{2} - 0,5\sqrt{24} = \sqrt{18 \cdot 2} + \sqrt{3 \cdot 2} - 0,5\sqrt{4 \cdot 6} = \\ \sqrt{36} + \sqrt{6} - \sqrt{6} = 6.$$

$$3. 1) \frac{4}{x^2-4} + \frac{1}{2-x} = \frac{4}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x-2} = \frac{4-x-2}{(x-2)(x+2)} = \\ = \frac{2-x}{(x-2)(x+2)} = -\frac{1}{x+2};$$

$$2) -\frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2+4x+4}{3} = -\frac{1 \cdot (x+2)^2}{(x+2) \cdot 3} = -\frac{x+2}{3}.$$

Ответ:  $-\frac{x+2}{3}$ .

4. Пусть  $x$  км/ч – скорость течения реки, тогда моторная лодка шла со скоростью  $(12 + x)$  км/ч.

Расстояние в 20 км плот прошёл за  $\frac{20}{x}$  ч, а моторная лодка за  $\frac{20}{12 + x}$  ч. Лодка была в пути на  $5\frac{1}{3}$  ч меньше, чем плот.

Получим уравнение:

$$\frac{20}{x} - \frac{20}{12 + x} = 5\frac{1}{3}.$$

Решим это уравнение:

$$20(12 + x) - 20x = 5\frac{1}{3}x(12 + x)$$

$$20 \cdot 12 + 20x - 20x = \frac{16}{3}x(12 + x)$$

$$60 \cdot 12 = 16x(12 + x)$$

$$15 \cdot 3 = x(12 + x)$$

$$x^2 + 12x - 45 = 0$$

$$x_1 = -15 \text{ (не подходит по смыслу задачи)}$$

$$x_2 = 3$$

Ответ: 3 км/ч.

$$5. \frac{12 - x}{6} + 1 > 0$$

$$12 - x + 6 > 0$$

$$-x > -18$$

$$x < 18$$

Ответ:  $x < 18$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Алгебра*. 8 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова ; под ред. С. А. Теляковского. – М. : Просвещение, 2010.

2. *Макарычев, Ю. Н.* Дидактические материалы по алгебре для 8 класса / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, Л. М. Короткова. – М. : Просвещение, 2008.

3. *Математические диктанты* для 5–9 классов : книга для учителя / Е. Б. Арутюнян, М. Б. Волович, Ю. А. Глазков, Г. Г. Левитас. – М. : Просвещение, 1991. – 80 с.

4. *Решение задач по статистике, комбинаторике и теории вероятностей*. 7–9 классы / авт.-сост. В. Н. Студенецкая. – 2-е изд., испр. – Волгоград : Учитель, 2006. – 428 с.

5. *Ткачева, М. В.* Элементы стохастики в курсе математики 7–9 классов основной школы / М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова // *Математика в школе*. – 2003. – № 3. – С. 36–50.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|  |          |
|--|----------|
| Введение.....  | 3        |
| <b>Глава I. Рациональные дроби</b> .....                                       | <b>4</b> |
| Урок 1. Понятие рациональной дроби.....  | 4        |
| Урок 2. Допустимые значения переменных, входящих в дробное выражение.....      | 5        |
| Урок 3. Основное свойство дроби .....  | 9        |
| Урок 4. Сокращение дробей.....   | 11       |
| Урок 5. Следствие из основного свойства дроби .....                            | 13       |
| Урок 6. Правило сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.....   | 16       |
| Урок 7. Сложение и вычитание дробей с противоположными знаменателями.....      | 18       |
| Урок 8. Правило сложения и вычитания дробей с разными знаменателями.....       | 19       |
| Урок 9. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями.....               | 22       |
| Урок 10. Сложение и вычитание рациональной дроби и целого выражения.....       | 26       |
| Урок 11. Контрольная работа 1 .....  | 29       |
| Урок 12. Правила умножения рациональных дробей и возведения их в степень.....  | 35       |
| Урок 13. Преобразование дробных выражений, содержащих действие умножения.....  | 38       |
| Урок 14. Правило деления рациональных дробей.....                              | 41       |
| Урок 15. Преобразование дробных выражений, содержащих действие деления .....   | 43       |
| Урок 16. Совместные действия с рациональными дробями.....                      | 46       |
| Урок 17. Совместные действия с рациональными дробями.....                      | 49       |
| Урок 18. Преобразование дробных выражений.....                                 | 53       |
| Урок 19. Нахождение среднего гармонического ряда положительных чисел .....     | 55       |
| Урок 20. Построение графика функции $y = \frac{k}{x}$ .....                    | 57       |
| Урок 21. Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график в решении различных задач ..... | 61       |
| Урок 22. Контрольная работа 2.....   | 65       |
| Урок 23. Представление дроби в виде суммы дробей .....                         | 74       |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Глава II. Квадратные корни</b> .....   | 76  |
| Урок 24. Рациональные числа.....  | 76  |
| Урок 25. Множество действительных чисел.....  | 77  |
| Урок 26. Действия над иррациональными числами.....  | 79  |
| Урок 27. Извлечение квадратных корней.....  | 82  |
| Урок 28. Применение понятия квадратного корня при решении различных задач.....  | 84  |
| Урок 29. Решение уравнений вида $x^2 = a$ .....   | 87  |
| Урок 30. Вычисление значений выражений, содержащих квадратные корни.....  | 89  |
| Урок 31. Способы нахождения приближенных значений квадратного корня с помощью оценки и на калькуляторе.....                   | 92  |
| Урок 32. Построение графика функции $y = \sqrt{x}$ и применение ее свойств.....   | 94  |
| Урок 33. Использование графика и свойств функции $y = \sqrt{x}$ при решении различных задач.....                              | 96  |
| Урок 34. Вычисление квадратного корня из произведения и дроби.....  | 99  |
| Урок 35. Квадратный корень из произведения и дроби при преобразовании выражений с корнем.....                                 | 101 |
| Урок 36. Применение свойства квадратного корня из степени при вычислениях.....  | 105 |
| Урок 37. Квадратный корень из степени при преобразовании различных выражений.....   | 108 |
| Урок 38. Контрольная работа 3.....  | 112 |
| Урок 39. Вынесение множителя за знак корня. Внесение множителя под знак корня.....  | 118 |
| Урок 40. Приведение подобных радикалов и применение формул сокращенного умножения при преобразовании выражений с корнями..... | 120 |
| Урок 41. Сокращение дробей, содержащих квадратные корни, и освобождение от иррациональности в знаменателе дроби.....          | 124 |
| Урок 42. Решение различных задач, связанных с преобразованием выражений, содержащих квадратные корни.....                     | 127 |
| Урок 43. Контрольная работа 4.....  | 130 |
| <b>Глава III. Квадратные уравнения</b> .....  | 138 |
| Урок 44. Определение квадратного уравнения.....   | 138 |
| Урок 45. Решение неполных квадратных уравнений.....   | 141 |
| Урок 46. Решение задач с помощью неполных квадратных уравнений.....   | 145 |

|   |            |
|---|------------|
| Урок 47. Решение квадратного уравнения выделением квадрата двучлена .....                                     | 149        |
| Урок 48. Вывод формулы корней квадратного уравнения .....   | 155        |
| Урок 49. Решение квадратных уравнений по формуле .....  | 158        |
| Урок 50. Решение квадратных уравнений с четным вторым коэффициентом .....                                     | 163        |
| Урок 51. Квадратное уравнение как математическая модель текстовой задачи .....                                | 167        |
| Урок 52. Решение задач с помощью квадратных уравнений .....   | 172        |
| Урок 53. Доказательство теоремы Виета и ее применение .....   | 177        |
| Урок 54. Применение теоремы Виета и обратной ей теоремы .....   | 181        |
| Урок 55. Контрольная работа 5 .....   | 184        |
| Урок 56. Понятие дробного рационального уравнения .....   | 190        |
| Урок 57. Решение дробных рациональных уравнений .....   | 196        |
| Урок 58. Решение дробных рациональных уравнений .....   | 201        |
| Урок 59. Составление дробного рационального уравнения по условию задачи .....                                 | 205        |
| Урок 60. Решение задач с помощью дробных рациональных уравнений .....   | 210        |
| Урок 61. Решение задач на совместную работу и повышенной сложности .....                                      | 216        |
| Урок 62. Контрольная работа 6 .....   | 221        |
| Урок 63. Уравнение с параметром .....   | 227        |
| <b>Глава IV. Неравенства</b> .....  | <b>231</b> |
| Урок 64. Определение числового неравенства .....  | 231        |
| Урок 65. Доказательство числовых неравенств .....   | 235        |
| Урок 66. Теоремы, выражающие свойства числовых неравенств .....   | 239        |
| Урок 67. Использование свойств числовых неравенств при оценке значения выражения .....                        | 244        |
| Урок 68. Теоремы о почленном сложении и умножении неравенств ..   | 247        |
| Урок 69. Использование теорем о почленном умножении и сложении неравенств при оценке значения выражения ..... | 252        |
| Урок 70. Абсолютная погрешность приближенного значения .....  | 255        |
| Урок 71. Относительная погрешность приближенного значения .....   | 260        |
| Урок 72. Контрольная работа 7 .....   | 264        |
| Урок 73. Основные понятия теории множеств. Пересечение и объединение множеств .....                           | 269        |
| Урок 74. Круги Эйлера .....   | 274        |

|   |     |
|---|-----|
| Урок 75. Аналитическая и геометрическая модели числового промежутка .....                             | 278 |
| Урок 76. Пересечение и объединение числовых промежутков .....   | 282 |
| Урок 77. Понятие решения неравенств с одной переменной .....  | 286 |
| Урок 78. Решение неравенств с одной переменной .....  | 290 |
| Урок 79. Решение неравенств, содержащих дроби .....   | 295 |
| Урок 80. Решение неравенств вида $0 \cdot x > b$ или $0 \cdot x < b$ , где $b$ – некоторое число..... | 300 |
| Урок 81. Понятие решения системы неравенств с одной переменной.....                                   | 305 |
| Урок 82. Решение систем неравенств с одной переменной.....  | 309 |
| Урок 83. Решение двойных неравенств.....  | 313 |
| Урок 84. Контрольная работа 8 .....   | 318 |
| Урок 85. Доказательство неравенств .....  | 326 |
| <b>Глава V. Степень с целым показателем. Элементы статистики</b> ...331                               |     |
| Урок 86. Понятие степени с целым отрицательным показателем .....                                      | 331 |
| Урок 87. Нахождение значений выражений, содержащих степени с целым показателем .....                  | 336 |
| Урок 88. Использование свойств степени с целым показателем для нахождения значений выражений .....    | 339 |
| Урок 89. Использование свойств степени с целым показателем для преобразования выражений .....         | 343 |
| Урок 90. Стандартный вид числа.....   | 347 |
| Урок 91. Решение задач, связанных с физическими величинами.....                                       | 350 |
| Урок 92. Нахождение средних статистических характеристик .....  | 353 |
| Урок 93. Интервальные ряды .....  | 357 |
| Урок 94. Столбчатые и круговые диаграммы.....   | 362 |
| Урок 95. Представление статистических данных в виде полигона .....                                    | 367 |
| Урок 96. Изображение интервальных рядов данных с помощью гистограммы.....                             | 372 |
| Урок 97. Контрольная работа 9.....  | 376 |
| Урок 98. Функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$ и их свойства.....                                       | 383 |
| Уроки 99–101. Итоговое повторение.....  | 387 |
| Урок 102. Итоговая контрольная работа .....   | 387 |
| Литература .....  | 395 |



*Охраняется законом об авторском праве. Воспроизведение всего пособия или любой его части, а также реализация тиража запрещаются без письменного разрешения издателя. Любые попытки нарушения закона будут преследоваться в судебном порядке.*

**Приглашаем к сотрудничеству учителей, методистов и других специалистов в области образования для поиска и рекомендации к публикации интересных материалов, разработок, проектов по учебной и воспитательной работе. Издательство «Учитель» выплачивает вознаграждение за работу по поиску материала. Издательство также приглашает к сотрудничеству авторов и гарантирует им выплату гонораров за предоставленные работы.**

**Е-mail: [metod-uch@bk.ru](mailto:metod-uch@bk.ru)**

**Телефон: (8442) 42-23-48; 42-23-38**

**Подробности см. на сайте издательства «Учитель»: [www.uchitel-izd.ru](http://www.uchitel-izd.ru)**

**АЛГЕБРА**

**8 класс**

**Поурочные планы**

**по учебнику Ю. Н. Макарычева,**

**Н. Г. Миндюк, К. И. Нешкова, С. Б. Суворовой**

**Авторы-составители**

**Татьяна Юрьевна Дюмина,**

**Ангела Анатольевна Махонина**

**Ответственные за выпуск**

**Л. Е. Гринин, А. В. Перепёлкина**

**Редактор А. В. Перепёлкина**

**Редакторы-методисты Л. В. Голубева, Г. П. Попова**

**Выпускающий редактор Н. Е. Волкова-Алексеева**

**Технический редактор Л. В. Иванова**

**Редактор-корректор Р. Ш. Эйсани**

**Компьютерная верстка О. В. Анненковой**

**Издательство «Учитель»**

**400067, г. Волгоград, ул. Кирова, 122**

Если Вы напишете по адресу: **400067, г. Волгоград, ул. Кирова, 122, издательство «Учитель»** или позвоните по телефону: **код (8442) 42-24-79, 42-20-63**, Вам будет выслан полный каталог пособий и книг издательства «Учитель». Адрес электронной почты (Е-mail): **[uchitel@avtlg.ru](mailto:uchitel@avtlg.ru)**

**По вопросам оптовых поставок обращаться по тел.:**

**42-03-92, 42-40-12, 42-25-58.**

---

Подписано в печать 21.10.10. Формат 60 × 90/16.

Бумага газетная. Гарнитура Тип Таймс. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 25,00. Тираж 9 000 экз. (1-й з-д 1–3 000). Заказ 4562.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных издательством материалов в ОАО «Тверской ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат детской литературы им. 50-летия СССР».

170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46.

